



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EXAME DE ADMISSÃO PARA O MESTRADO - 2026.1

19 de novembro de 2025

1. Mostre que

- a) Se $A_\lambda, \lambda \in I$, é uma família de conjuntos abertos, então $\cup_{\lambda \in I} A_\lambda$ é um conjunto aberto.
- b) Se $A_1, \dots, A_k$ são conjuntos abertos, então $\cap_{i=1}^k A_i$ é um conjunto aberto.
- c) Dê um exemplo mostrando que em geral não é verdade que toda interseção de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

2. Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas. Mostre que

- a) $A = \{x \in X; f(x) < g(x)\}$ é aberto em X .
- b) $F = \{x \in X; f(x) \leq g(x)\}$ é fechado em X .

3. Mostre que uma bijeção contínua entre subconjuntos compactos da reta é um homeomorfismo.

4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável e defina

$$g(x) = f(2x) - f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Se

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x f'(x) = 0,$$

então g é limitada em $\mathbb{R}$.

5. Seja $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Considere uma sequência $(a_n) \subset \mathbb{R}$ tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge. Suponha que existe $C \geq 0$ para o qual

$$|f(x)| \leq C|x| \quad \text{para todo } x \in [-1, 1].$$

Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ converge.