



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EXAME DE ADMISSÃO PARA O DOUTORADO - 2026.1

19 de novembro de 2025

1. Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que, para todo X , $\text{int } X$ é aberto e contém qualquer aberto que esteja contido em X .
2. Uma aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é dita **própria** se é contínua e, para todo compacto $K \subset \mathbb{R}^m$, $f^{-1}(K)$ é compacto. Mostre que:

- (a) Toda aplicação própria $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é fechada.
- (b) Toda aplicação $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ contínua, injetiva e fechada é própria.

3. Sejam $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 e $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, tais que

$$\varphi(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (f(x), xf(x) - y).$$

Dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, suponha que $f'(x_0) \neq 0$. Prove que, em uma vizinhança de (x_0, y_0) , φ é invertível e satisfaz $\varphi^{-1}(u, v) = (g(u), ug(u) - v)$, em que g é uma função de classe C^1 .

4. Seja $M(n)$ o espaço das matrizes $n \times n$ com entradas reais, identificado com $\mathbb{R}^{n^2}$. Considere o conjunto das **matrizes ortogonais**:

$$O(n) = \{X \in M(n) \mid X^T X = I\}.$$

- (a) Mostre que o conjunto $U = GL(n, \mathbb{R}) \subset M(n)$, formado pelas matrizes invertíveis, é aberto.
- (b) Prove que a aplicação $f : U \rightarrow M(n)$, dada por $f(X) = X^{-1}$, é diferenciável e calcule sua derivada no ponto $A \in U$:

$$f'(A) \cdot V = -A^{-1}VA^{-1}, \quad \forall V \in M(n).$$

- (c) Defina $F : M(n) \rightarrow \text{Sym}(n)$ por $F(X) = X^T X$, onde $\text{Sym}(n)$ é o espaço das matrizes simétricas $n \times n$. Mostre que I é valor regular de F e conclua que $O(n) = F^{-1}(I)$ é uma subvariedade de $M(n)$ de dimensão $\frac{n(n-1)}{2}$.

5. Seja $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \text{ irracional,} \\ 0 & \text{para } x \text{ racional, } y \text{ irracional,} \\ 1/q & \text{para } x \text{ racional, } y = p/q \text{ fração irredutível.} \end{cases}$$

Mostre que f é integrável e que

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} f = 0.$$