



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EXAME DE ADMISSÃO PARA O MESTRADO - 2025.2

06 de junho de 2025

1. Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tais que para todo $x \in A$ e todo $y \in B$ se tenha $x \leq y$. Mostre que:

- i) $\sup A \leq \inf B$.
- ii) $\sup A = \inf B$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existam $x \in A$ e $y \in B$ com $y - x < \varepsilon$.

Todo $y \in B$ é cota superior de A , logo $\sup A \leq y$. Isto mostra que $\sup A$ é cota inferior de B , portanto $\sup A \leq \inf B$. Se valer a desigualdade estrita $\sup A < \inf B$ então $\varepsilon = \inf B - \sup A > 0$ e $y - x \geq \varepsilon$ para quaisquer $x \in A, y \in B$. Reciprocamente, se $\sup A = \inf B$ então, para todo $\varepsilon > 0$ dado, $\sup A - \varepsilon/2$ não é cota superior de A e $\inf B + \varepsilon/2$ não é cota inferior de B , logo existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $\sup A - \varepsilon/2 < x \leq \sup A = \inf B \leq y < \inf B + \varepsilon/2$. Segue-se que $y - x < \varepsilon$.

2. Prove que se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Dê um exemplo,

justificando sua resposta, onde $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ mas a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Se a série $\sum a_n$ é convergente então, pondo $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, existe $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Consideremos a sequência (t_n) , com $t_1 = 0$ e $t_n = s_{n-1}$ quando $n > 1$. Evidentemente, $\lim t_n = s$ e $s_n - t_n = a_n$. Portanto $\lim a_n = \lim (s_n - t_n) = \lim s_n - \lim t_n = s - s = 0$. Para o contra-exemplo, considere a série harmônica.

3. Dado $X \subseteq \mathbb{R}$.

- i) Defina:
 - a) O interior do subconjunto X em $\mathbb{R}$.
 - b) Quando X será um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.
- ii) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Mostre que o intervalo (a, b) é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.
 - i) a) Dizemos que um ponto $x \in X$ é ponto interior, se existe um $\varepsilon > 0$ tal que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq X$. O conjunto de todos os pontos interiores é o interior de X .
 - b) Um conjunto X é aberto se todos os seus pontos são interiores.

- ii) Dado $x \in (a, b)$, temos que $a < x < b$ e assim, $x - a > 0$ e $b - x > 0$. Tome $\varepsilon = \min\{x - a, b - x\}$. Afirmamos que $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (a, b)$. De fato, note que $\varepsilon \leq x - a$ e assim, $x - \varepsilon \geq a$. Logo, se $y \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ temos que $a \leq x - \varepsilon < y < x + \varepsilon < x + (b - x) = b$. Portanto, $y \in (a, b)$.

4. Prove que toda aplicação localmente Lipschitziana definida num conjunto compacto é Lipschitziana.

Seja $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ onde K é um compacto. Como f é localmente Lipschitz, para cada x , existe algum $r_x > 0$ e L_x tal que f é Lipschitz com constante L_x em $B(x, r_x)$. Então, os conjuntos $B(x, \frac{1}{2}r_x)$, com $x \in K$, formam uma cobertura aberta de K , portanto um número finito cobre K . Para conveniência, denotamos estes por $B(x_k, \frac{1}{2}r_k)$ (ao invés de r_{x_k}). Definimos $M = \sup_{x \in M} \|f(x)\|$, $r = \frac{1}{2} \min r_k$, $L_0 = \frac{2M}{r}$, e $L = \max(L_0, L_k)$. Então, L é uma constante de Lipschitz para f em K . Para ver isso, escolha $x, y \in K$. Se $\|x - y\| \geq r$, então temos que

$$\frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} \leq \frac{2M}{r} = L_0 \leq L.$$

Se $\|x - y\| < r$, então para algum x_k , temos $x \in B(x_k, \frac{1}{2}r_k)$. Então $y \in B(x_k, r_k)$ e, assim,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L_k \|x - y\| \leq L \|x - y\|.$$

5. Seja $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, positiva, monótona não-crescente. Prove que se $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge então $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot f(x) = 0$.

Seja $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \geq a$. Por hipótese, existe $L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$ tal que $x > A \Rightarrow L - \varepsilon < \varphi(x) < L + \varepsilon$. Daí $x > 2A \Rightarrow L - \varepsilon < \varphi(x/2) \leq \varphi(x) < L + \varepsilon$, donde $2\varepsilon > \varphi(x) - \varphi(x/2) = \int_{x/2}^x f(t)dt \geq (x/2) \cdot f(x/2)$ pois f é não-crescente. Logo $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x/2)f(x/2) = 0$ e o resultado segue-se.

Definições

Definição 1. Uma aplicação $g : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita Lipschitziana quando $|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$, para cada $x, y \in X$ e algum $k > 0$.

Definição 2. Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se localmente Lipschitziana quando, para todo $x \in X$, existe um intervalo aberto B , de centro x , tal que $f|_{(B \cap X)}$ é Lipschitziana.