



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EXAME DE ADMISSÃO PARA O MESTRADO - 2023.2

12 de Junho de 2023

1. (2,5) Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{R}$ satisfaz a propriedade $(*)$ se

$$|x_n - x_{n+1}| < \frac{1}{2^n} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

- a) Prove que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é uma sequência de Cauchy se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ e $p \geq 1$ tem-se que $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.
- b) Mostre que toda sequência que satisfaz a propriedade $(*)$ é de Cauchy.
- c) Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Mostre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência que satisfaz a propriedade $(*)$.

2. (2,0) Dizemos que um subconjunto $K \subset \mathbb{R}$ é compacto se para cada família $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ formada por conjuntos abertos tal que $K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$, existe uma sub-família $\{U_\lambda\}_{\lambda \in J}$ com $J \subset \Lambda$ e J finito de forma que $K \subset \bigcup_{\lambda \in J} U_\lambda$.

Utilizando a **definição acima**, mostre que se $a < b$ então o intervalo $[a, b]$ é compacto.

3. (1,5) Prove que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, para todo $X \subset \mathbb{R}$ tem-se $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$.

4. (1,5) Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sequências de números reais convergindo para $a \in \mathbb{R}$, tais que $x_n < a < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $x = a$, demonstre que

$$f'(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}.$$

5. (1,5) Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e não-negativa. Então $\int_a^b f(x) dx = 0$ se, e somente se, $f(x) \equiv 0$.

6. (1,0) Demonstre que:

- a) $x \geq \sin(x)$, para $x > 0$;
- b) $1 - x^2/2 \leq \cos(x)$, para $x > 0$.