



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EXAME DE ADMISSÃO PARA O MESTRADO - 2022.2

05 de Julho de 2022

1. (1,5) Analise a convergência e/ou divergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ quando $r > 1$ e $r \leq 1$.
2. (3,5) Assinale V (VERDADEIRO) ou F (FALSO). **Se VERDADEIRO, apresente uma demonstração, se FALSO, apresente um contraexemplo.**
 - () Toda sequência limitada é convergente;
 - () Se $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ são sequências convergentes satisfazendo $x_n < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim x_n < \lim y_n$;
 - () Toda função integrável é contínua;
 - () Se $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 , então f é Lipschitziana;
 - () Toda função uniformemente contínua é Lipschitziana;
 - () Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em $x = 0$ e satisfaz $f(tx) = tf(x)$ para todo $t, x \in \mathbb{R}$, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = cx$;
 - () Dados $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}$ conjuntos compactos disjuntos, existem conjuntos abertos $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}$ disjuntos tais que $K_1 \subset U_1$ e $K_2 \subset U_2$.
3. (1,5) Prove que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, para todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$.
4. (2,0) Considere a sequência $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, $n \in \mathbb{N}$, isto é,

$$\left(\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots \right).$$

Prove as seguintes afirmações:

- (i) A sequência $(x_n)_n$ é limitada;
 - (ii) A sequência $(x_n)_n$ é monótona;
 - (iii) A sequência $(x_n)_n$ é convergente e calcule o seu limite.
5. (1,5) Seja $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Prove que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) \, dx = 0.$$