



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EXAME DE ADMISSÃO PARA O DOUTORADO - 2025.2

06 de junho de 2025

1. Seja $n \geq 1$. Mostre que todo subespaço vetorial próprio de $\mathbb{R}^n$ tem interior vazio. Seja W um subespaço próprio de $\mathbb{R}^n$. Suponha por absurdo que $\text{int}(W) \neq \emptyset$. Então, existe $x \in W$ e $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq W$. Seja $y \in \mathbb{R}^n - W$ e considere $z = x - \frac{r}{2} \frac{y}{\|y\|}$. Afirmamos que $z \in B(x, r)$. De fato, $\|z - x\| = \frac{r}{2} < r$. Assim, $y = \frac{2\|y\|}{r}(z - x) \in W$, o que é uma contradição.

2. Considere um conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$. Prove que uma aplicação $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua se, e somente se, o gráfico de f é compacto.

Suponhamos que $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ seja contínua. Vejamos que, quando f é contínua, o gráfico de f é homeomorfo a K . De fato, a aplicação $\varphi : K \rightarrow \text{graf}(f) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, dada por $\varphi(x) = (x, f(x))$, é contínua, pois suas coordenadas o são, e bijetiva. Uma vez que $\varphi^{-1} = P|_{\text{graf}(f)}$, em que $P : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ sobre $\mathbb{R}^n$, e P é contínua, por ser linear, temos que φ^{-1} é contínua. Logo, φ é um homeomorfismo. Daí, $\text{graf}(f)$ é compacto. Reciprocamente, suponhamos que o gráfico de $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ seja compacto e consideremos a aplicação $\varphi : \text{graf}(f) \rightarrow K$, dada por $\varphi(x, f(x)) = x$. Temos que φ é contínua, pois é a restrição, ao gráfico de f , da projeção $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Uma vez que φ é bijetiva, tem-se que φ é um homeomorfismo. Em particular, sua inversa $\varphi^{-1}(x) = (x, f(x))$, $x \in K$, é contínua. Logo, f , sendo uma função-coordenada de φ^{-1} , é contínua.

3. Resolva os seguintes itens:

- i) Toda aplicação bilinear $\varphi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é diferenciável e, em cada ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, sua derivada é a transformação linear $\varphi'(a, b) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, definida por

$$\varphi'(a, b) \cdot (v, w) = \varphi(v, b) + \varphi(a, w),$$

para todo $(v, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

- ii) Sejam $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciáveis no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Prove que $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\xi(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$, é diferenciável com

$$\xi'(x) \cdot v = \langle f'(x) \cdot v, g(x) \rangle + \langle f(x), g'(x) \cdot v \rangle,$$

para quaisquer $x \in U, v \in \mathbb{R}^m$.

- i) Com efeito, a bilinearidade de φ nos dá

$$\varphi(a + v, b + w) - \varphi(a, b) = \varphi(v, b) + \varphi(a, w) + \varphi(v, w).$$

Sabemos que existe uma constante $c > 0$ tal que $|\varphi(v, w)| \leq c|v||w|$ para todo $v \in \mathbb{R}^m$ e todo $w \in \mathbb{R}^n$. Fazendo uso da norma da soma, temos $|(v, w)| = |v| + |w|$. Logo

$$\frac{|\varphi(v, w)|}{|(v, w)|} \leq \frac{c|v||w|}{|v| + |w|} \leq c|v| \text{ e daí, } \lim_{(v, w) \rightarrow (0, 0)} \frac{\varphi(v, w)}{|(v, w)|} = 0.$$

Fica, então, cumprida a condição de diferenciabilidade, com $\varphi'(a, b) : (v, w) \mapsto \varphi(v, b) + \varphi(a, w)$ e $r(v, w) = \varphi(v, w)$.

- ii) Defina $\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$ e $\gamma(x) = (f(x), g(x))$. Então, $\xi(x) = (\varphi \circ \gamma)(x)$. Pela Regra da Cadeia e o item 1., temos que $\xi'(x) \cdot v = \varphi'(\gamma(x)) \circ \gamma'(x) \cdot v = \varphi'(f(x), g(x)) \circ (f'(x) \cdot v, g'(x) \cdot v) = \varphi(f'(x) \cdot v, g(x)) + \varphi(f(x), g'(x) \cdot v) = \langle f'(x) \cdot v, g(x) \rangle + \langle f(x), g'(x) \cdot v \rangle$.

4. i) Enuncie o Teorema da Função Inversa para uma função $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- ii) Sejam $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis. Defina $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ pondo $F(x, y) = (f(x) \cdot h(y), g(y))$. Suponha que f e g são difeomorfismos globais de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$. Mostre que F é um difeomorfismo global se, e somente se, $0 \notin h(\mathbb{R})$.
- i) Sejam $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 definida num aberto U de $\mathbb{R}^n$ e $a \in U$. Então, se $f'(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, existem abertos $V \subset U$ e $W \subset \mathbb{R}^n$, tais que $a \in V$, $f(a) \in W$ e $f|_V : V \rightarrow W$ é um difeomorfismo de classe C^1 com $g'(y) = (f'(g(y)))^{-1}$ para cada $y \in W$.
- ii) Note que

$$JF(x, y) = \begin{pmatrix} f'(x)h(y) & f(x)h'(y) \\ 0 & g'(y) \end{pmatrix},$$

e assim $|JF(x, y)| = f'(x)g'(y)h(y)$. Se F é um difeomorfismo global, então $|JF(x, y)| \neq 0$ para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e portanto, não pode ocorrer que $0 \in h(\mathbb{R})$. Por outro lado, se $0 \notin h(\mathbb{R})$, como f e g são difeomorfismos globais, temos que $f'(x) \neq 0$ e $g'(y) \neq 0$ para cada $x, y \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema da Função Inversa, temos que F é um difeomorfismo local. Para concluirmos que é um difeomorfismo global, basta mostrarmos que F é injetora. De fato, se $F(x, y) = F(a, b)$ então, $(f(x)h(y), g(y)) = (f(a)h(b), g(b))$ e portanto, $g(y) = g(b)$. Como g é um difeomorfismo e portanto bijetor, temos que $y = b$. Da condição $f(x)h(b) = f(a)h(b)$, do fato que $0 \notin h(\mathbb{R})$ e da condição de f ser um difeomorfismo, temos imediatamente que $x = a$, o que mostra o desejado.

5. i) Enuncie o Teorema de Mudança de Variáveis.
- ii) Seja $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um difeomorfismo de classe C^1 tal que $f(B) \subset B$, onde B é a bola unitária fechada de $\mathbb{R}^m$, e $|\det f'(x)| < 1$ para todo $x \in B$. Prove que, para toda função contínua $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ tem-se $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{f^n(B)} g(x) dx = 0$, onde $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ (n fatores).

- i) Sejam $h : U \rightarrow V$ um difeomorfismo de classe C^1 entre abertos $U, V \subset \mathbb{R}^m$, $X \subset U$ um compacto J mensurável e $f : h(X) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Então $f \circ h : X \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável e

$$\int_{h(X)} f(y) dy = \int_X f(h(x)) \cdot |\det .h'(x)| dx$$

- ii) Por indução e o Teorema de Mudança de Variáveis, temos:

$$\begin{aligned} \int_{f^n(B)} g(x) dx &= \int_{f^{n-1}(B)} g(f(x)) |\det (f'(x))| dx \\ &= \int_{f^{n-2}(B)} g(f^2(x)) |\det (f'(f(x)))| |\det (f'(x))| dx \\ &= \int_{f^{n-3}(B)} g(f^3(x)) |\det (f'(f^2(x)))| |\det (f'(f(x)))| |\det (f'(x))| dx \\ &\vdots \\ &= \int_B g(f^n(x)) \prod_{k=0}^{n-1} |\det (f'(f^k(x)))| dx. \end{aligned}$$

Como f é um difeomorfismo em $\mathbb{R}^m$ e B é compacto, $|\det (f'(x))|$ atinge um máximo, $\lambda < 1$, em B . Pelo fato de B ser compacto e g contínua, existe $\gamma > 0$ tal que $|g(x)| \leq \gamma$ para cada $x \in B$. Portanto,

$$\left| \int_{f^n(B)} g(x) dx \right| \leq \gamma \lambda^n \int_B 1 dx$$

e como $\lambda < 1$, temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{f^n(B)} g(x) dx = 0$.