



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EXAME DE ADMISSÃO PARA O DOUTORADO - 2023.2

12 de Junho de 2023

1. (3,0) Seja $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}^n$. Dizemos que o limite de $\{\|x_k\|\}_{k \in \mathbb{N}}$ é **mais infinito** quando, dado $L > 0$, existe um natural k_0 tal que $k \geq k_0$ implica $\|x_k\| > L$. Mostre que são equivalentes:
 - a) $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = +\infty$;
 - b) $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ não possui subsequências convergentes;
 - c) Para cada conjunto limitado $A \subset \mathbb{R}^n$, o conjunto de índices $k \in \mathbb{N}$ para os quais $x_k \in A$ é finito.
2. (1,5) Mostre que toda transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua.
3. (1,5) Sejam $E \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . Mostre que se $f'(x)$ é invertível para todo $x \in E$ e $W \subset E$ é aberto, então $f(W)$ é aberto.
4. (2,0)
 - a) Demonstre, usando a definição, que a função $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\phi(x) = \|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle$ é diferenciável.
 - b) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função diferenciável. Se $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $g(x) = \|f(x)\|_2^2$, mostre que g é diferenciável e calcule sua derivada.
5. (2,0) Seja $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \text{ irracional,} \\ 0 & \text{para } x \text{ racional, } y \text{ irracional,} \\ 1/q & \text{para } x \text{ racional, } y = p/q \text{ fração irredutível.} \end{cases}$$

Mostre que f é integrável e que

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} f = 0.$$