



UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EXAME DE ADMISSÃO PARA O DOUTORADO - 2022.2

05 de Julho de 2022

1. (1,5) Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua então seu gráfico $\{(x, y) | y = f(x)\}$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. A recíproca é verdadeira?

2. (3,5) Assinale V (VERDADEIRO) ou F (FALSO). **Se VERDADEIRO, apresente uma demonstração, se FALSO, apresente um contraexemplo.**

() Seja $E \subset \mathbb{R}^N$ subespaço vetorial tal que $E \neq \mathbb{R}^N$. Então $\text{int}(E) = \emptyset$;

() Seja $B(0, r)$ a bola aberta de centro 0 e raio $r > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Se $N \geq 2$, então $B(0, r) \setminus \{0\}$ é conexa;

() Se $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ cujo Laplaciano

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$$

é sempre positivo, então F tem máximos locais;

() Se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável, então $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$;

() Se $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ é diferenciável em $x = 0$ e satisfaz $f(tx) = tf(x)$ para todos $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$, então f é uma transformação linear;

() Dados $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^N$ conjuntos fechados disjuntos, existem conjuntos abertos $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^N$ disjuntos tais que $K_1 \subset U_1$ e $K_2 \subset U_2$;

() O gráfico de uma função integrável $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, definida em um bloco N -dimensional $A \subset \mathbb{R}^N$, tem medida nula em $\mathbb{R}^{N+1}$.

3. (2,0) Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ aberto. Considere $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe C^1 com $|\varphi'(x)| \leq \lambda < 1$ para todo $x \in U$ e seja $\lambda > 0$ uma constante. Defina $f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ por $f(x) = x + \varphi(x)$ para todo $x \in U$.

(a) Mostre que $|f'(x)u - f'(x)v| \geq (1 - \lambda)|u - v|$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^N$;

(b) Mostre que f é um difeomorfismo local e que $f(U)$ é aberto;

(c) Mostre que f é um difeomorfismo de U sobre $f(U)$. Além disso, se $U = \mathbb{R}^N$, então f é sobrejetiva.

4. (1,5) Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $a \in U$ é tal que $f'(a)$ é isomorfismo, prove que

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(f(B(a; r)))}{\text{vol}(B(a; r))} = |\det f'(a)|.$$

5. (1,5) Prove que se $f_k : A \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é uma sequência de funções limitadas integráveis que converge uniformemente para f , então f é integrável e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_A f_k(x) dx = \int_A f(x) dx.$$