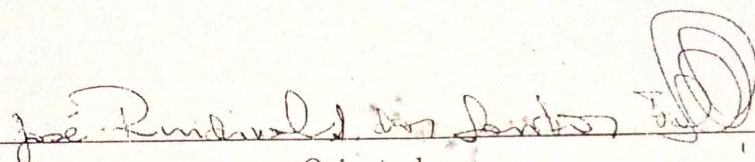
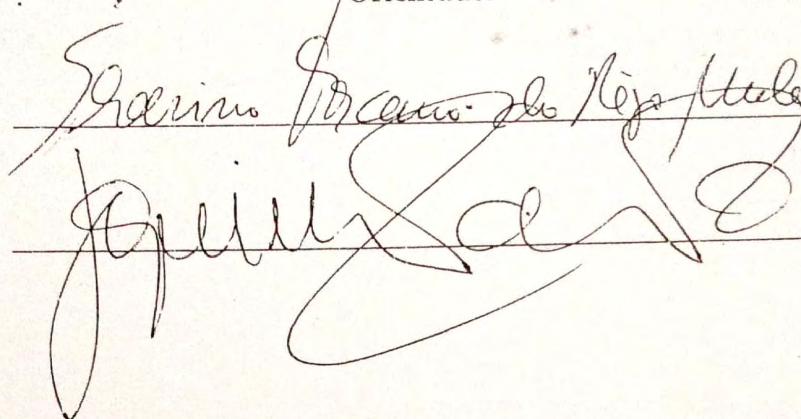


Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Mestre em Ciências.

Aprovado:



Orientador



DISTRIBUIÇÕES CONORMAIS

Por

Suzana Gomes da Silva Guimarães

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Cidade Universitária - Tels. 271-2211/R.2411

RECIFE - BRASIL

Outubro - 1990

"Um fio de ouro percorre a história da Humanidade , ininterruptamente : é a obra dos melhores homens nas sucessivas idades. De extremo a extremo continua a percorrê-la, e , quando passa por perto de nós, percebemo-lo como a luz clara e esplendente, irresistivelmente penetrante, que projeta a Verdade, quando concebida pelos grandes espíritos."

Walter Moxon

A meus estimados pais

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I - O CÁLCULO BÁSICO	2
CAPÍTULO II - DISTRIBUIÇÕES CONORMAIS	20
II.a Caracterização	20
II.b Propriedades	44
CAPÍTULO III - APLICAÇÃO	59
REFERÊNCIAS	78

INTRODUÇÃO

Dos estudos sobre as equações lineares surgiram, no final dos anos 60, as distribuições lagrangeanas.

Uma década depois, verificou-se que uma subclasse dessas distribuições poderiam ser utilizadas na resolução de problemas não lineares porque tais distribuições satisfaziam :

- 1) Eram singulares exatamente numa subvariedade.
- 2) Constituíam uma álgebra do espaço das distribuições.

Para estas distribuições o wave front set estava contido no fibrado conormal $N(Y)$ de Y , onde Y era subvariedade C^∞ de uma variedade $C^\infty X$; conseqüentemente tais distribuições foram denominadas conormais com respeito a Y .

A restrição de $u \in \mathcal{D}'$ (onde X é variedade C^∞) a uma subvariedade Y de X pode sempre ser definida quando o fibrado conormal de Y não intercepta o $WF(u)$ (wave front set de u). No caso das distribuições conormais apesar desta intersecção ser não vazia, a restrição fica bem definida. Isto é uma outra característica interessante dessas distribuições.

Elas representam um importante papel também no desenvolvimento do cálculo dos operadores pseudo-diferenciais totalmente característico numa variedade com fronteira.

No presente trabalho nos restringiremos a dar uma caracterização das distribuições conormais, no sentido de escrevê-las como integrais oscilatórias, enunciaremos e demonstraremos algumas propriedades destas distribuições, e finalmente faremos uma aplicação baseada no paper do Alain Piriou, ([4]). Tal aplicação nos mostra que quando uma distribuição u satisfaz certas condições e é conormal clássica do tipo H numa vizinhança de um ponto x_0 de $\Sigma = \{x_1 = 0\}$ então há uma propagação da conormalidade clássica de u ao longo das curvas bicaracterísticas traçadas a partir de x_0 .

No presente capítulo apresentaremos definições e resultados que serão utilizados nos capítulos posteriores.

Definição I.1: Se $m \in \mathbb{R}$, então $S^m = S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ é o conjunto de todos $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tais que para todo α, β a derivada $a_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi) = \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)$ satisfaz a limitação

$$|a_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|}; \quad x, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

S^m é chamado espaço dos símbolos de ordem m . Escrevemos $S^{-\infty} = \bigcap S^m$, $S^\infty = \bigcup S^m$.

Definição I.2: Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto, definimos $S_{loc}^m(X \times \mathbb{R}^n)$ como o conjunto de todos $a \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^n)$ tais que $\phi(x)a(x, \xi) \in S^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ para todo $\phi \in C_0^\infty(X)$. Isto quer dizer que para todo conjunto compacto $K \subset X$ podemos encontrar $C_{\alpha, \beta, K}$ tal que

$$|a_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta, K} (1 + |\xi|)^{m - |\alpha|}; \quad x \in K, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Expansão assintótica de símbolos:

Definição I.3: Suponha $m_0 > m_1 > m_2 > \dots$, $m_j \in \mathbb{R}$, $m_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} -\infty$ e $p_j \in S^{m_j}$, $p \in S^{m_0}$. Dizemos que $p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j$ se $p - \sum_{j < k} p_j \in S^{m_k}$ para todo k .

Dados $p_j \in S^{m_j}$, a existência de um $p \in S^{m_0}$ tal que $p \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j$ é garantida.

(Ver referência [1], proposição 4.18 do cap. 4, parágrafo 3)

Denotaremos $x = (x', x'')$ onde $x' = (x_1, \dots, x_k)$ e $x'' = (x_{k+1}, \dots, x_n)$ para $x \in \mathbb{R}^n$.

Definição I.4: Se $m \in \mathbb{C}$ e $h = k^{-1}$ onde $k \in \mathbb{Z}_+^*$, o conjunto de todos $a \in S^{\text{rem}}$ tais que

$$a(x, \xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x, \xi)$$

onde a_j é homogênea de grau $m - jh$ onde $|\xi| > 1$ e $a_j \in S^{\text{rem}-jh}$, é denominado polihomogêneos de grau m e passo h . Escrevemos $a \in S_{\text{phg}}^{m,h}$. Quando $h = 1$ o passo será omitido. A homogeneidade na definição diz que

$$a_j(x, t\xi) = t^{m-jh} a_j(x, \xi); \quad |\xi| > 1, t > 1.$$

Considere agora

$$X_j = \{ \xi \in \mathbb{R}^n; R_{j-1} < |\xi| < R_j \} \quad \text{onde } R_0 = 0 \text{ e}$$

$$R_j = 2^{j-1} \text{ se } j > 0$$

Para qualquer $u \in \mathcal{S}'$ com $\hat{u} \in L_{\text{loc}}^2$ faremos

$$\Pi_j u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{X_j} e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(\xi) d\xi$$

Definição I.5: Seja X uma variedade C^∞ . Uma função u definida em X é dita estar em $C^j(X)$ ou em $L_{\text{loc}}^p(X)$ se para qualquer sistema de coordenadas k a função composição $(k^{-1})^* u$ definida por

$$(k^{-1})^* u(x) = u(k^{-1}(x)), \quad x \in \tilde{X}_k \subseteq \mathbb{R}^n$$

está em $C^j(\tilde{X}_k)$ ou em $L_{\text{loc}}^p(\tilde{X}_k)$.

Agora, definiremos distribuição numa variedade :

Definição I.6: Seja X uma variedade C^∞ . Se para qualquer sistema de coordenadas k em X nós relacionamos uma distribuição $u_k \in \mathcal{D}'(\tilde{X}_k)$ ($\tilde{X}_k \subseteq \mathbb{R}^n$) tal que

$$u_{k'} = (k \circ k'^{-1})^* u_k \quad \text{em} \quad k'(X_k \cap X_{k'})$$

denominamos o sistema u_k uma distribuição em X . O conjunto de todas as distribuições em X é denotado por $\mathcal{D}'(X)$.

Comentário: Se $\phi \in C_0^\infty(k'(X_k \cap X_{k'}))$ temos

$$\begin{aligned} u_{k'}(\phi) &= \left[(k \circ k'^{-1})^* u_k \right](\phi) = u_k \left[\phi \circ (k \circ k'^{-1})^{-1} \right] = \\ &= u_k(\phi \circ k' \circ k^{-1}). \end{aligned}$$

Definição I.7: Seja X uma variedade C^∞ , V um fibrado vetorial real sobre X . Se $Y \subset X$ então uma seção u de V sobre Y é uma aplicação $Y \ni y \mapsto u(y) \in V_y$, ou seja, u é uma aplicação de Y em V com $\Pi \circ u = \text{id}$.

Definição I.8: Sejam X e V como na Definição I.7. Seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma cobertura aberta de X com trivializações locais, e $Y \subseteq X$ um aberto. O espaço das seções distribucionais $\mathcal{D}'(Y, V)$ é o espaço de todos sistemas $u_i \in \mathcal{D}'(Y \cap X_i, \mathbb{R}^N)$ (onde N é a dimensão da fibra) satisfazendo as condições de transição (Ver referência [2], seção 6.4).

Comentário: Dizer que $u_i \in \mathcal{D}'(Y \cap X_i, \mathbb{R}^N)$ significa dizer que u_i é um vetor distribucional com N coordenadas

$$u_i = (u_i^1, \dots, u_i^N) \quad \text{onde} \quad u_i^j \in \mathcal{D}'(Y \cap X_i) \quad \forall j, 1 \leq j \leq N$$

Definição I.9: Se $1 \leq p \leq \infty$ e $\omega \in \mathbb{R}$, então ${}^p H_{(\omega)}$ é o espaço de Banach de todas $u \in \mathcal{S}'$ com $\hat{u} \in L_{loc}^2$ e a norma

$${}^p \|u\|_{(\omega)} = \left(\sum \| \Pi_j u \|_{(\omega)}^p \right)^{1/p}$$

é finita. (Se $p = \infty$ devemos ler como $\sup_j \| \Pi_j u \|_{(\omega)}$)

Este espaço é conhecido como espaço de Besov. Quando $p=2$ (${}^2 H_{(\omega)} = H_{(\omega)}$) este espaço coincide com o espaço de Sobolev.

Definição I.10: Seja X um aberto de $\mathbb{R}^n$, então $H_{(a)}^{p, \text{loc}}$ é o espaço de todas $u \in \mathcal{D}'(X)$ tais que $\phi u \in H_{(a)}^p(\mathbb{R}^n)$ para toda $\phi \in C_0^\infty(X)$. Mais geralmente, se X é uma variedade C^∞ uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(X)$ é dita estar em $H_{(a)}^{p, \text{loc}}(X)$ se

$$(k^{-1})^* u = u_k \in H_{(a)}^{p, \text{loc}}(\tilde{X}_k)$$

para todo sistema de coordenada C^∞ $k: X_k \rightarrow \tilde{X}_k \subset \mathbb{R}^n$. A topologia é definida pelas semi-normas

$$u \mapsto \|\phi u_k\|_{(a)}$$

onde ϕ é um elemento arbitrário em $C_0^\infty(\tilde{X}_k)$ e k é qualquer sistema de coordenada C^∞ .

Sejam X e V como na Definição I.7, e seja $u \in \mathcal{D}'(X, V)$. $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ onde $\{X_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura de vizinhanças trivializadoras onde os X_i são domínios de cartas. Como $u \in \mathcal{D}'(X, V)$ temos que $u = \{u_i\}$ onde $u_i \in \mathcal{D}'(X_i, \mathbb{R}^N)$ (Ver Definição I.8), $u_i = (u_i^1, \dots, u_i^N)$ $u_i^j \in \mathcal{D}'(X_i) \forall 1 \leq j \leq N$. Dizer que $u_i^j \in \mathcal{D}'(X_i^k)$ ($X_i = X_i^k$) é dizer que $u_{i,k}^j \in \mathcal{D}'(\tilde{X}_i^k)$ onde $k: X_i^k \rightarrow \tilde{X}_i^k$ é um sistema de coordenadas. Agora, daremos a seguinte definição:

Definição I.11: Sejam X variedade C^∞ e E um fibrado vetorial sobre X . Dizemos que $u \in \mathcal{D}'(X, E)$ está em $PH_{(a)}^{p, \text{loc}}(X, E)$ se $u_{i,k}^j \in H_{(a)}^{p, \text{loc}}(\tilde{X}_i^k) \forall i, j, k$

Integrais Oscilatórias

Definição I.12: Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, ($n \geq 0$), e seja $\varphi \in C^\infty(X \times \mathbb{R}^N \setminus 0)$ uma função com valores reais que é homogênea de grau 1 com respeito a $\theta \in \mathbb{R}^N \setminus 0$ e seja $\alpha \in S_{\text{loc}}^m(X \times \mathbb{R}^N)$; consideremos a integral

$$I_\varphi(\alpha u) = \iint e^{i\varphi(x, \theta)} \alpha(x, \theta) u(x) dx d\theta, \quad u \in C_0^\infty(X)$$

Definição I.13 : O espaço $\mathbb{I}^m(X, Y; E)$ é definido como o conjunto de todas $u \in \mathcal{D}'(X, E)$ tais que

$$L_1 \circ \dots \circ L_N u \in H_{(-m-n/4)}^{\infty \text{ lac}}(X, E) \quad (\text{onde } n = \dim X)$$

para todo N e todo operador dif. de 1ª ordem L_j entre seções distribucionais de E com coeficientes C^∞ tangentes à Y .

A topologia é a menor que faz as aplicações

$$u \mapsto L_1 \circ \dots \circ L_N u \in H_{(-m-n/4)}^{\infty \text{ lac}} \text{ contínuas}$$

Comentário : A condição de Y ser fechado é utilizada para concluir que se $u \in \mathbb{I}^m(X, Y)$ então o suporte singular de u está contido em Y . Se tomarmos Y uma espiral em $X = \mathbb{R}^2$ convergindo para a origem e $u = \delta_0$, teremos um exemplo de uma distribuição cujo suporte singular não está contido em Y . De fato $u \in \mathbb{I}^m(X, Y)$, $m_0 > 1/2$, pois para qualquer vetor L tangente à Y teremos que $L \delta_0$ é um múltiplo de δ_0 .

Exemplo de distribuição conormal :

Em $\mathbb{R}^1$ tome as distribuições homogêneas :

$$f(x) = x_+^\lambda \quad Y = \{0\} \quad X = \mathbb{R} \quad \operatorname{Re} \lambda > 0$$

A referência [2], pag. 68 nos dá que

$$(I.1) \quad \frac{d}{dx} x_+^\lambda = \lambda x_+^{\lambda-1} \quad \text{se } \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

Disto temos, por sua vez, que

$$x \frac{d}{dx} x_+^\lambda = \lambda x x_+^{\lambda-1} = \lambda x_+^\lambda \quad \text{pois } \operatorname{Re}(\lambda-1) > -1$$

Assim, para termos que $x_+^\lambda \in \mathbb{I}^m(X, Y)$, para algum m , basta que

$x_+^\lambda \in H_{\Delta}^{\infty \text{ lac}}$ onde $\Delta = -m - 1/4$, pois os vetores tangentes à Y

são da forma $a(x) x \frac{d}{dx}$ onde $a(x) \in C^\infty$. Como para $\Delta \leq 0$ temos $x_+^\lambda \in H_{\Delta}^{\infty \text{ lac}}$ concluímos que $x_+^\lambda \in \mathbb{I}^m(X, Y)$ para $m \geq -1/4$.

Lema I.1 : Se Δ é um inteiro $> n/2$ então

$$(I.2) \quad |u(x)|^2 \leq C \int_{|x-y| < 1} \left[\sum_{|\alpha|=\Delta} |D^\alpha u(y)|^2 + |u(y)|^2 \right] dy, \quad u \in \mathcal{S}$$

Dem : Como todo operador elíptico com coeficientes constantes tem uma parametriz que é uma função C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus 0$ temos que $(-\Delta)^\Delta$ tem uma parametriz E com suporte na bola unitária.

Então

$$(-\Delta)^\Delta E = \delta + \omega \quad \text{onde } \omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Temos

$$\hat{\delta} + \hat{\omega} = \left[(-\Delta)^\Delta E \right]^\wedge(\xi) = |\xi|^{2\Delta} \hat{E}(\xi) \quad (\text{onde a última}$$

igualdade pode-se provar por indução sobre Δ)

Portanto

$$|\xi|^{2\Delta} \hat{E}(\xi) = 1 + \hat{\omega}$$

Como $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ temos que $\hat{\omega}$ é limitada e conseqüentemente $|\xi|^{2\Delta} \hat{E}(\xi)$ é uma função limitada.

Agora

$$|\xi^\alpha \hat{E}(\xi)| \leq |\xi|^{|\alpha|} |\hat{E}(\xi)|$$

Fazendo $|\alpha| = \Delta$, temos

$$|\xi^\alpha \hat{E}(\xi)| \leq |\xi|^{2\Delta} |\hat{E}(\xi)| |\xi|^{-\Delta} \leq C |\xi|^{-\Delta}$$

Como $|\xi|^{-\Delta} \sim (1 + |\xi|)^{-\Delta}$ para $|\xi| \gg 1$, temos

$$|\xi^\alpha \hat{E}(\xi)| \leq C (1 + |\xi|)^{-\Delta} \quad \text{para } |\xi| \gg 1 \text{ e } |\alpha| = \Delta$$

Temos que $\xi^\alpha \hat{E}$ é limitada em $\bar{B}_R(0)$ onde $R > 0$, portanto

$$|\xi^\alpha \hat{E}(\xi)| \leq C (1 + |\xi|)^{-\Delta} (1 + |\xi|)^\Delta \leq \tilde{C} (1 + |\xi|)^{-\Delta}$$

em $\bar{B}_R(0)$ onde $\tilde{C} = C (1 + R)^\Delta$

Logo

$$|\xi^\alpha \hat{E}(\xi)| \leq C (1 + |\xi|)^{-\Delta} \quad \text{se } |\alpha| = \Delta$$

Agora

$$\xi^\alpha \hat{E}(\xi) \in L^2 \text{ pois } \int |\xi^\alpha \hat{E}(\xi)|^2 d\xi \leq \int (1 + |\xi|)^{-2\Delta} d\xi < \infty$$

pois $\Delta > n/2$.

Desde que

$$u = u * (-\Delta)^k E - u * \omega = \sum_{|\alpha|=k} k!/\alpha! D^\alpha u * D^\alpha E - u * \omega$$

a estimativa (I.2) segue pela desigualdade de Cauchy-Schwarz .

cqd

Lema I.2 : Se $a \in S^{+\infty}$ e a é homogêneo de grau m , isto é,

$$a(x, t\xi) = t^m a(x, \xi), \quad |\xi| > 1 \text{ e } t > 1, \text{ então } a(x, \xi) \in S^{\text{Rem}} \quad |\xi| > 1.$$

Dem : Sabemos que

$$(I.3) \quad a(x, t\xi) = t^m a(x, \xi), \quad |\xi| > 1, \quad t > 1$$

$$(I.4) \quad |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |\xi|)^{\tilde{m} - |\alpha|}, \quad \tilde{m} \in \mathbb{R}$$

De (I.3) temos

$$(I.5) \quad D_\xi^\alpha a(x, t\xi) = t^{|\alpha|} (D_\xi^\alpha a)(x, t\xi) = t^m D_\xi^\alpha a(x, \xi)$$

Então

$$(I.6) \quad (D_\xi^\alpha a)(x, t\xi) = t^{m-|\alpha|} D_\xi^\alpha a(x, \xi)$$

Disto temos

$$(I.7) \quad (D_x^\beta D_\xi^\alpha a)(x, t\xi) = t^{m-|\alpha|} D_x^\beta D_\xi^\alpha a(x, \xi)$$

Temos ainda de (I.4) que

$$(I.8) \quad |\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} \quad \forall x, \quad |\xi| = 1$$

De (I.8) e (I.7) temos

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, t\xi)| \leq C_{\alpha\beta} t^{\text{Re}(m-|\alpha|)} \quad |\xi| = 1$$

Para qualquer $\xi \neq 0$ façamos $\xi = |\xi| (\xi / |\xi|)$, então

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} |\xi|^{\text{Re}(m-|\alpha|)} \quad |\xi| > 1$$

Como $|\xi|^l \sim (1 + |\xi|)^l$ quando $|\xi| > 1, \forall l$, temos

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} (1 + |\xi|)^{\text{Re}(m-|\alpha|)} \quad |\xi| > 1$$

cqd

Teorema I.1 : Se $f \in C^k(B)$ onde $B = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < R\}$ e $k \geq 1$ então

$$f(x) - f(0) = \sum x_j f_j(x) \quad \text{onde } f_j \in C^{k-1}(B),$$

$$\partial^\alpha f_j(0) = \partial^\alpha \partial_j f(0) / (1 + |\alpha|) \quad \text{e}$$

$$\sup_B |\partial^\alpha f_j| \leq \sup_B |\partial^\alpha \partial_j f| \quad |\alpha| < k.$$

Dem : Do Teorema Fundamental do Cálculo resulta que

$$f(y) - f(0) = \sum_{j=1}^n y_j \int_0^1 (\partial_j f)(ty) dt \quad \text{fazendo}$$

$$f_j(y) := \int_0^1 (\partial_j f)(ty) dt \quad \text{segue que}$$

$$f(y) - f(0) = \sum_{j=1}^n y_j f_j(y)$$

Agora, tomando $y \in B$, temos para $|\alpha| < k$

$$\partial^\alpha f_j(y) = \partial^\alpha \int_0^1 (\partial_j f)(ty) dt = \int_0^1 \partial^\alpha (\partial_j f)(ty) dt$$

$$\partial^\alpha f_j(y) = \int_0^1 (\partial^\alpha \partial_j f)(ty) t^{|\alpha|} dt$$

$$\partial^\alpha f_j(0) = (\partial^\alpha \partial_j f)(0) \int_0^1 t^{|\alpha|} dt = (\partial^\alpha \partial_j f)(0) / (1 + |\alpha|)$$

Agora,

$$|\partial^\alpha f_j(y)| \leq \int_0^1 |(\partial^\alpha \partial_j f)(ty)| t^{|\alpha|} dt \leq$$

$$\leq \sup_B |\partial^\alpha \partial_j f| (1 / (1 + |\alpha|)) \leq \sup_B |\partial^\alpha \partial_j f|$$

O que implica que

$$\sup_B |\partial^\alpha f_j| \leq \sup_B |\partial^\alpha \partial_j f|.$$

cqd

Lema I.3 : Qualquer campo vetorial C^∞ em $\mathbb{R}^n$ que é tangente ao subespaço definido por $x' = 0$ pode ser escrito na forma

$$\sum_{i, j \leq k} a_{ij}(x) x_i \partial_{x_j} + \sum_{j=k+1}^n a_j(x) \partial_{x_j} \quad \text{onde}$$

$$a_{ij} \text{ e } a_j \in C^\infty.$$

Dem : Seja $\sum_{j=1}^n a_j(x) \partial_{x_j}$ um campo vetorial C^∞ que é tangente ao subespaço $x' = 0$.

$$\sum_{j=1}^n a_j(x) \partial_{x_j} = \sum_{j=1}^k a_j(x) \partial_{x_j} + \sum_{j=k+1}^n a_j(x) \partial_{x_j}$$

Como o campo é tangente ao subespaço $x' = 0$ temos

$$\sum_{j=1}^k a_j(0, x'') \partial_{x_j} = 0 \quad \text{o que implica}$$

$$a_j(0, x'') = 0 \text{ quando } j \leq k \text{ pois } \{ \partial_{x_j} \}_{j=1}^n \text{ é L.I.}$$

Para cada x'' fixo temos, utilizando o teorema I.1,

$$a_j(x) - a_j(0, x'') = \sum_{i \leq k} a_{ij}(x) x_i$$

E portanto

$$a_j(x) = \sum_{i \leq k} a_{ij}(x) x_i \quad j \leq k$$

Para verificarmos que $a_{ij}(x) \in C^\infty$ (como função de x' e x'') basta escrevermos

$$a_{ij}(x) = \int_0^1 (\partial_i a_j)(tx', x'') dt$$

Como o integrando é C^∞ temos que $a(x)$ é C^∞ .

cqd

Afirmacão I.1 : Seja $\phi(x) \in C_0^\infty$ e $a(x, \xi) \in S^m$ então $\phi a \in S^m$.

Dem : Seja $\tilde{a}(x, \xi) = \phi(x) a(x, \xi)$.

$$\partial_x^\beta (\tilde{a}(x, \xi)) = \sum_{\gamma \leq \beta} \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \partial_x^\gamma \phi(x) \partial_x^{\beta-\gamma} a(x, \xi)$$

O que implica que

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (\tilde{a}(x, \xi)) = \sum_{\gamma \leq \beta} \begin{bmatrix} \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \partial_x^\gamma \phi(x) \partial_\xi^\alpha \partial_x^{\beta-\gamma} a(x, \xi)$$

Portanto

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta (\tilde{a}(x, \xi))| \leq C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m-|\alpha|} \quad \forall \alpha, \beta.$$

Assim

$$\tilde{a}(x, \xi') \in S^m.$$

cqd

Afirmacão I.2 : Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$, aberto e seja u da forma

$$u(x) = \int e^{i\langle x', \xi' \rangle} a(x, \xi') d\xi' \quad \text{onde } a(x, \xi') \in S^m(X \times \mathbb{R}^k)$$

$$\text{Então } \phi u \in \mathcal{H}_{(-m-k/2)}^\infty \quad \forall \phi \in C_0^\infty(X)$$

$$\text{Esta afirmao nos diz que } u \in \mathcal{H}_{(-m-k/2)}^{lac}.$$

Dem : Seja $v = \phi u$

$$1^\circ) \hat{v} \in L_{lac}^2 \quad \text{pois sendo}$$

$$v(x) = \phi(x) u(x) = \int e^{i\langle x', \xi' \rangle} \phi(x) a(x, \xi') d\xi'$$

Seja $\tilde{b}(x, \xi') = \phi(x) a(x, \xi')$, pela afirmao I.1, $\tilde{b}(x, \xi') \in S^m$.

$$\exists K \subset \subset \mathbb{R}^n \text{ tal que } \tilde{b}(x, \xi') = 0 \text{ se } x \notin K.$$

Utilizando o lema 18.2.1 (Ver referência [3]) temos

$$v(x) = \int e^{i\langle x', \xi' \rangle} b(x'', \xi') d\xi' \quad \text{onde } b \in S^m \text{ e}$$

$$b(x'', \xi') = e^{-i\langle D_x, D_{\xi'} \rangle} \tilde{b}(x, \xi')|_{x'=0}.$$

E finalmente, como veremos no capítulo II, proposio II.a.1, temos que

$$\hat{v} \in L_{lac}^2.$$

$$2^0) \quad \| v \|_{(-m-k/2)}^\infty = \sup_j \| \Pi_j v(x) \|_{(-m-k/2)} < \infty \quad \text{pois}$$

Seja $\Delta = -m-k/2$

$$\| \Pi_j v(x) \|_{\Delta}^2 = \int (1 + |\eta|^2)^\Delta |(\Pi_j v)^\wedge(\eta)|^2 d\eta \stackrel{(1)}{=}$$

$$\stackrel{(1)}{=} \int_{X_j} (1 + |\eta|^2)^\Delta |\hat{v}(\eta)|^2 d\eta \stackrel{(2)}{\leq}$$

$$\stackrel{(2)}{\leq} C_N \int_{X_j} (1 + |\eta|^2)^\Delta (1 + |\eta''|^2)^{-2N} (1 + |\eta'|^2)^{2m} d\eta' d\eta'' \stackrel{(3)}{\leq}$$

$$\stackrel{(3)}{\leq} C_N \int (1 + |\eta''|^2)^{-N+|m+k/2|} (1 + |\eta'|^2)^{-k/2} d\eta' d\eta''$$

$$R_{j-1} < |\eta| < R_j$$

Onde

$$(1) : (\Pi_j u)^\wedge(\eta) = \chi_{X_j}(\eta) \hat{u}(\eta)$$

(2) : Sendo $\hat{b}$ a transformada de Fourier de b com respeito a x''

$$\hat{v}(\eta) = (2\pi)^k \hat{b}(\eta'', \eta') \quad e$$

$$|\hat{b}(\eta'', \eta')| \leq C_N (1 + |\eta''|^2)^{-N} (1 + |\eta'|^2)^m$$

(Ver demonstração de (1) e (2) na prova da Proposição II.a.1 , cap. II)

(3) : Decorre da desigualdade de Peetre :

Seja $l \in \mathbb{R}$, θ e $\theta' \in \mathbb{R}^n$

$$(1 + |\theta|^2)^l \leq 2^{|l|} (1 + |\theta - \theta'|^2)^{|l|} (1 + |\theta'|^2)^l$$

Fazendo $\theta = (\eta', \eta'')$, $\theta' = (\eta', 0'')$ e $l = -m-k/2$

Temos

$$(1 + |\eta|^2)^l \leq 2^{|l|} (1 + |\eta''|^2)^{|l|} (1 + |\eta'|^2)^l .$$

É suficiente mostrar que

$$\int_{R_{j-1} < |\eta| < R_j} (1 + |\eta''|^2)^{-N+|m+k/2|} (1 + |\eta'|^2)^{-k/2} d\eta' d\eta'' \text{ é}$$

limitada nas seguintes regiões :

$$(I) = \left\{ \eta : R_{j-1} / \sqrt{2} < |\eta'| < R_j \right\}$$

$$(II) = \left\{ \eta : R_{j-1} / \sqrt{2} < |\eta''| < R_j \text{ e } |\eta'| < R_j / \sqrt{2} \right\}$$

para $j > j_0$ (j_0 grande), pois para $j \leq j_0$ temos

$$\int_{R_{j-1} < |\eta| < R_j} \varphi(\eta', \eta'') d\eta' d\eta'' < \int_{|\eta| \leq R_{j_0}} \varphi(\eta', \eta'') d\eta' d\eta'' \leq$$

$$\leq C \text{ vol } B^n(R_{j_0}) :=: C_{j_0} \text{ onde}$$

$$\varphi(\eta', \eta'') = (1 + |\eta''|^2)^{-N+|m+k/2|} (1 + |\eta'|^2)^{-k/2}$$

Em (I) temos :

$$\int_{(I)} \varphi(\eta', \eta'') d\eta' d\eta'' = \int (1 + |\eta''|^2)^{-N+|m+k/2|} d\eta'' \int_{2^{-1/2}R_{j-1} < |\eta'| < R_j} (1 + |\eta'|^2)^{-k/2} d\eta'$$

Para $j_0 \gg 1$ temos $|\eta'| \gg 1$ e portanto

$$(1 + |\eta'|^2)^{-k/2} \sim |\eta'|^{-k}$$

Logo

$$\int_{2^{-1/2}R_{j-1} < |\eta'| < R_j} (1 + |\eta'|^2)^{-k/2} d\eta' \sim \int_{2^{-1/2}R_{j-1} < |\eta'| < R_j} |\eta'|^{-k} d\eta' <$$

$$< C_j^{-k} \int_{2^{-1/2}R_{j-1} < |\eta'| < R_j} d\eta' \text{ para } j > j_0 \text{ onde } C_j = R_{j-1} 2^{-1/2}$$

$$C_j^{-k} \int_{2^{-1/2}R_{j-1} < |\eta'| < R_j} d\eta' = C_j^{-k} \left[\text{vol } B^k(R_j) - \text{vol } B^k(C_j) \right] =$$

$$= C_j^{-k} \tilde{C}_k (R_j^k - C_j^k) = \tilde{C}_k (2^{3k/2} - 1) \quad \text{onde}$$

$$\tilde{C}_k = \text{vol } B^k(1) \quad \text{e} \quad R_j = 2^{j-1}$$

E como existe N tal que

$$\int (1 + |\eta''|^2)^{-N+|m+k/2|} d\eta'' < \infty$$

Temos

$$\int \phi(\eta', \eta'') d\eta' d\eta'' \leq M(k) \quad \text{para } j \geq j_0 \text{ (} j_0 \text{, grande)}$$

(I)

Em (II) temos:

$$\int \phi(\eta', \eta'') d\eta' d\eta'' = \int (1 + |\eta''|^2)^{-N+|m+k/2|} d\eta'' \int_{|\eta'| < R_j 2^{-1/2}} (1 + |\eta'|^2)^{-k/2} d\eta'$$

(II) $R_{j-1} 2^{-1/2} < |\eta''| < R_j$

$$\int_{R_{j-1} 2^{-1/2} < |\eta''| < R_j} (1 + |\eta''|^2)^{-N+|m+k/2|} d\eta'' \sim$$

$$\sim \int_{R_{j-1} 2^{-1/2} < |\eta''| < R_j} |\eta''|^{-2N+2|m+k/2|} d\eta'' <$$

$$< b_j \int_{R_{j-1} 2^{-1/2} < |\eta''| < R_j} d\eta'' = b_j \text{vol } B^\mu(1) \left[R_j^\mu - (R_{j-1} 2^{-1/2})^\mu \right] <$$

$$< b_j \tilde{b}_\mu R_j^\mu \quad \text{onde } \mu = n - k, \quad b_j = (R_{j-1} 2^{-1/2})^{-2N+2|m+k/2|}$$

$$\text{e } \tilde{b}_\mu = \text{vol } B^\mu(1)$$

$$\int_{|\eta'| < R_j 2^{-1/2}} (1 + |\eta'|^2)^{-k/2} d\eta' < \int_{|\eta'| < R_j 2^{-1/2}} d\eta' = \text{vol } B^k(1) (R_j 2^{-1/2})^k =$$

$$= d_k R_j^k \quad \text{onde } d_k = \text{vol } B^k(1) 2^{-k/2}$$

Portanto,

$$\int \varphi(\eta', \eta'') d\eta' d\eta'' \leq C_{n,k} R_j^{-2N+2|m+k/2|+n} \quad (II)$$

Escolhendo $N > |m + k/2| + n/2$ temos para $j > j_0$ (onde $j_0 \gg 1$) que

$$\int \varphi(\eta', \eta'') d\eta' d\eta'' < C_{n,k} \quad (III)$$

qgd

Afirmacão I.3 : Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Se $\alpha(x, \xi) \in S^m(X \times \mathbb{R}^k)$ temos que $\partial_{\xi_1} \alpha(x, \xi) \in S^{m-1}(X \times \mathbb{R}^k)$, e portanto $\xi_j \partial_{\xi_1} \alpha(x, \xi) \in S^m(X \times \mathbb{R}^k)$

Dem : Para demonstrar a primeira afirmacão, dados α, β tome $\tilde{\alpha} = \alpha + (0, \dots, 1, \dots, 0)$ com 1 na l -ésima coordenada. Então

$$|\partial_{\xi}^{\tilde{\alpha}} \partial_x^{\beta} \alpha(x, \xi)| = |\partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} \partial_{\xi_1} \alpha(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} (1+|\xi|)^{m-|\tilde{\alpha}|}$$

pois $\alpha \in S^m$

Como $|\tilde{\alpha}| = |\alpha| + 1$ temos

$$|\partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} \partial_{\xi_1} \alpha(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} (1+|\xi|)^{m-1-|\alpha|}$$

Na segunda afirmacão, dados $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ e β qualquer, seja $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, 0, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_k)$ e $b = \partial_{\xi_1} \alpha(x, \xi)$

Temos

$$\begin{aligned} |\partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} (\xi_j \partial_{\xi_1} \alpha(x, \xi))| &= |\partial_{\xi}^{\tilde{\alpha}} \partial_{\xi_j}^{\alpha_j} \xi_j (\partial_x^{\beta} b)| = \\ &= |\partial_{\xi}^{\tilde{\alpha}} [(\xi_j \partial_{\xi_j}^{\alpha_j} (\partial_x^{\beta} b) + n(\alpha_j) \partial_{\xi_j}^{\alpha_j-1} (\partial_x^{\beta} b))]| \leq \\ &\leq |\xi_j| |\partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} b| + |n(\alpha_j)| |\partial_{\xi}^{\tilde{\alpha}} \partial_{\xi_j}^{\alpha_j-1} (\partial_x^{\beta} b)| \end{aligned}$$

Como $|\xi_j| \leq |\xi| < (1+|\xi|)$ e $b \in S^{m-1}$ temos que

$$| \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} (\xi_j, b) | \leq \tilde{C}_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m-|\alpha|} +$$

$$+ \tilde{C}_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m-1-|\tilde{\alpha}|} \text{ onde } \tilde{\alpha} = \alpha - (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

com 1 na j-ésima coordenada .

Portanto

$$| \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} (\xi_j, b) | \leq \tilde{C}_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{m-|\alpha|}$$

Donde se conclui que $\xi_j, b \in S^m$.

cqd

Afirmacão I.4 : $x^{\alpha} D^{\beta}$ é composição de operadores diferenciais de 1ª ordem tangentes ao plano $x' = 0$, para $\forall \alpha, \beta$ tais que $|\alpha'| \geq |\beta'|$.

Dem : Temos $x^{\alpha} D^{\beta} = x^{\alpha'} D^{\beta'} x^{\alpha''} D^{\beta''}$ onde $\alpha = (\alpha', \alpha'')$ e $\beta = (\beta', \beta'')$

Agora, $D^{\beta''} = C \partial_{k+1}^{\beta_{k+1}} \dots \partial_n^{\beta_n}$ não tem derivadas nas variáveis x_j ($j \leq k$), portanto é tangente ao plano $x' = 0$.

Temos que

$$(I.8) \quad x^{\alpha'} D^{\beta'} = C (x_1^{\alpha_1} \partial_1^{\beta_1}) \dots (x_k^{\alpha_k} \partial_k^{\beta_k})$$

Como $|\alpha'| \geq |\beta'|$ podemos reordenar os índices de forma que tenhamos

$$\alpha_j < \beta_j \quad \text{se } j < j_0$$

$$\alpha_j \geq \beta_j \quad \text{se } j \geq j_0 \text{ para algum } j_0 (1 \leq j_0 \leq k)$$

$$\text{Seja } \delta_j = \alpha_j - \beta_j$$

Podemos escrever

$$x_j^{\alpha_j} \partial_j^{\beta_j} = \begin{cases} x_j^{\delta_j} (x_j^{\beta_j} \partial_j^{\beta_j}) & \text{se } j \geq j_0 \\ (x_j^{\alpha_j} \partial_j^{\alpha_j}) \partial_j^{-\delta_j} & \text{se } j < j_0 \end{cases}$$

Então temos que (I.8) fica

$$\begin{aligned}
 x^{\alpha'} D^{\beta'} &= (x_1^{\alpha_1} \partial_1^{\alpha_1}) \partial_1^{-\delta_1} \dots (x_{j_0-1}^{\alpha_{j_0-1}} \partial_{j_0-1}^{\alpha_{j_0-1}}) \partial_{j_0-1}^{-\delta_{j_0-1}} \\
 &\quad \cdot x_{j_0}^{\delta_{j_0}} (x_{j_0}^{\beta_{j_0}} \partial_{j_0}^{\beta_{j_0}}) \dots x_k^{\delta_k} (x_k^{\beta_k} \partial_k^{\beta_k}) = \\
 &= (x_1^{\alpha_1} \partial_1^{\alpha_1}) \dots (x_{j_0-1}^{\alpha_{j_0-1}} \partial_{j_0-1}^{\alpha_{j_0-1}}) \partial_1^{-\delta_1} \dots \partial_{j_0-1}^{-\delta_{j_0-1}} \\
 &\quad \cdot x_{j_0}^{\delta_{j_0}} \dots x_k^{\delta_k} (x_{j_0}^{\beta_{j_0}} \partial_{j_0}^{\beta_{j_0}}) \dots (x_k^{\beta_k} \partial_k^{\beta_k})
 \end{aligned}$$

Como $\sum_{j=1}^k \delta_j \geq 0$ temos

$$\sum_{j=j_0}^k \delta_j \geq \sum_{j=1}^{j_0-1} -\delta_j$$

E portanto

$$x_{j_0}^{\delta_{j_0}} \dots x_k^{\delta_k} \partial_1^{-\delta_1} \dots \partial_{j_0-1}^{-\delta_{j_0-1}} \text{ pode ser agrupado com}$$

termos $b(x) (x_j \partial_i)$ com $i \neq j$ e $b(x) = \prod_{n=j_0}^k x_n^{m(n)}$ onde $m(n) \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Agora se mostrarmos que $x_i^l \partial_i^l = \sum_{j=1}^l n(j) (x_i \partial_i)^j$ decorre do

lema I.3 que $x^{\alpha'} D^{\beta'}$ é tangente ao plano $x' = 0$.

$$\text{Como } (x_i \partial_i)^l = x_i^l \partial_i^l + \sum_{j=1}^{l-1} n(j) x_i^j \partial_i^j \quad \forall l \in \mathbb{N},$$

(É fácil mostrar!), temos que

$$x_i^l \partial_i^l = \sum_{j=1}^l n(j) (x_i \partial_i)^j, \quad l \in \mathbb{N}$$

E portanto segue a afirmação I.4

cqd ;

Afirmção I.5 : Dado $u \in {}^\infty H_A$ ($A \in \mathbb{R}$) é equivalente:

i) $\forall \varphi \in C_0^\infty$, $\forall N \in \mathbb{N}$ e para $\forall L_1, \dots, L_N$ operadores diferenciais de 1ª ordem tangentes ao plano $x' = 0$ temos

$$L_1 \circ \dots \circ L_N \varphi u \in {}^\infty H_A$$

ii) $\forall \varphi \in C_0^\infty$, $\forall N \in \mathbb{N}$ e para $\forall L_1, \dots, L_N$ operadores diferenciais de 1ª ordem tangentes ao plano $x' = 0$ temos

$$\varphi L_1 \circ \dots \circ L_N u \in {}^\infty H_A$$

Dem : i) $\Rightarrow$ ii)

$$\varphi L_1 \circ \dots \circ L_N u = \tilde{L}_1 \circ \dots \circ L_N \psi u \in {}^\infty H_A,$$

onde $\tilde{L}_1 = \varphi L_1$ e $\psi \equiv 1$ no $\text{supp} \varphi$

ii) $\Rightarrow$ i)

$$L_1 \circ \dots \circ L_N (\varphi u) = \text{soma de termos do tipo } \psi_{i_1 i_2 \dots i_j} L_{i_1} \circ \dots \circ L_{i_j} u$$

onde $\psi_{i_1 i_2 \dots i_j} \in C_0^\infty$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq N$, $0 \leq j \leq N$,

$i_j \in \{1, 2, \dots, N\}$.

Assim temos que

$$L_1 \circ \dots \circ L_N \varphi u \in {}^\infty H_A \quad \forall N, \forall \varphi \in C_0^\infty.$$

cqd

II.a) Caracterização

Proposição II.a.1 : Seja $\phi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ igual a 0 numa viz. da origem, $\alpha(x'', \xi') \in S^m(\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k)$ nula para x'' fora de um conjunto compacto, e seja u definida pela integral oscilatória (ver cap I, definição I.12)

$$u(x) = \int e^{i\langle x', \xi' \rangle} \alpha(x'', \xi') d\xi'$$

Então $\hat{u} \in L^2_{loc}$ e

$$(II.a.1) \quad \int |\hat{u}(\xi)|^2 |\phi(\xi/R)| d\xi \leq CR^{k+2m}, \quad R > 1$$

Se $\alpha \in S^m_{phg}(\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k)$, α_0 é o símbolo principal e $m' = \text{Rem}$ então

$$(II.a.2) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} R^{-k-2m'} (2\pi)^{-n-k} \int |\hat{u}(\xi)|^2 \phi(\xi/R) d\xi = \\ = \int \int |\alpha_0(x'', \xi')|^2 \phi(\xi', 0) dx'' d\xi'$$

A segunda parte da prop. II.a.1 vem enfatizar a afirmação de que a desigualdade é sharp no sentido de que não se consegue um decrescimento mais lento em termos de R .

Dem : Seja $x = (x', x'')$ e $\xi = (\xi', \xi'')$

Seja $\hat{\alpha}$ a transformada de Fourier de α com respeito a x'' , ou seja,

$$\hat{\alpha}(\xi'', \xi') = \int e^{-i\langle x'', \xi'' \rangle} \alpha(x'', \xi') dx''$$

Observe que tem sentido falar na transformada de Fourier de α com respeito a x'' porque, para ξ' fixo, temos $\alpha(x'', \xi') \in \mathcal{S}'$ pois :

$$\sup_{x''} |x''^\alpha D_{x''}^\beta \alpha(x'', \xi')| = \sup_{x'' \in K} |x''^\alpha D_{x''}^\beta \alpha(x'', \xi')| \leq \\ \leq C_\beta (1 + |\xi'|)^m \sup_{x'' \in K} |x''|^{|\alpha|} < \infty, \text{ onde } K \text{ é um compacto tal que } \\ \alpha(x'', \xi') = 0 \text{ para } x'' \notin K.$$

Verificaremos que $u \in \mathcal{S}'$:

$$u(x) = \hat{a}^2(x'', \cdot)(-x')$$

Seja $\varphi \in \mathcal{S}$; temos

$$\begin{aligned} |\langle u(x), \varphi(x) \rangle| &= |\langle \hat{a}^2(x'', \cdot)(-x'), \varphi(x) \rangle| = \\ &= |\langle a(x'', \xi'), \hat{\varphi}^2(-\xi', x'') \rangle| = \\ &= \left| \int_K \int \frac{a(x'', \xi')}{(1+|\xi'|^2)^N} (1+|\xi'|^2)^N \hat{\varphi}^2(-\xi', x'') d\xi' dx'' \right| \leq \\ &\leq \left[\int_K \int \left| \frac{a(x'', \xi')}{(1+|\xi'|^2)^N} \right|^2 d\xi' dx'' \right]^{1/2} \left[\int_K \int \left| \frac{\hat{\varphi}^2(-\xi', x'')}{(1+|\xi'|^2)^{-N}} \right|^2 d\xi' dx'' \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Escolhendo N adequado temos que

$$\int_K \int \left| \frac{a(x'', \xi')}{(1+|\xi'|^2)^N} \right|^2 d\xi' dx'' < \infty ;$$

Agora,

$$\begin{aligned} &\left[\int_K \int \left| \frac{\hat{\varphi}^2(\xi', x'')}{(1+|\xi'|^2)^{-N}} \right|^2 d\xi' dx'' \right]^{1/2} = \\ &= \left[\int_K \int \left| \left((1 - \Delta_{x'})^N \varphi \right)^\wedge(\xi', x'') \right|^2 d\xi' dx'' \right]^{1/2} = \\ &= \left[\int_K (2\pi)^{-2k} \int \left| (1 - \Delta_{x'})^N \varphi \right|^2(x', x'') dx' dx'' \right]^{1/2} \leq \\ &\leq C \left\| (1 + |x|^2)^{(n+1)/2} (1 - \Delta_{x'})^N \varphi \right\|_\infty \end{aligned}$$

Como $u \in \mathcal{S}'$ tem sentido falar na transformada de Fourier de u , que é definida por

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

$$u(x) = (2\pi)^k \hat{a}^{v_2}(x'', x')$$

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \hat{\varphi} \rangle = (2\pi)^k \langle \hat{a}^{v_2}, \hat{\varphi} \rangle = (2\pi)^k \langle a, (\hat{\varphi})^{v_2} \rangle =$$

$$= (2\pi)^k \langle a, \hat{\varphi}^1 \rangle = (2\pi)^k \langle \hat{a}^1, \varphi \rangle \Rightarrow \hat{u}(\xi) = (2\pi)^k \hat{a}^1(\xi'', \xi')$$

Como, no nosso caso, $\hat{a}$ é a transformada de Fourier de a com respeito à x'' , temos

$$\hat{u}(\xi) = (2\pi)^k \hat{a}(\xi'', \xi')$$

Com isto temos que $\hat{u} \in L^2_{loc}$.

Agora,

$$\int |\hat{u}(\xi)|^2 \phi(\xi/R) d\xi = (2\pi)^{2k} \int |\hat{a}(\xi'', \xi')|^2 \phi(\xi/R) d\xi$$

Por uma mudança de variável, $\eta = (\eta', \eta'')$ onde $\eta' = \xi'/R$

e $\eta'' = \xi''$, temos

$$\begin{aligned} \int |\hat{a}(\xi'', \xi')|^2 \phi(\xi/R) d\xi &= \int \left| \det \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j} \right] \right| |\hat{a}(\eta'', R\eta')|^2 \phi(\eta', \eta''/R) d\eta = \\ &= R^k \int |\hat{a}(\xi'', R\xi')|^2 \phi(\xi', \xi''/R) d\xi. \end{aligned}$$

Logo

$$(II.a.3) \quad \int |\hat{u}(\xi)|^2 \phi(\xi/R) d\xi = (2\pi)^{2k} R^k \int |\hat{a}(\xi'', R\xi')|^2 \phi(\xi', \xi''/R) d\xi$$

Agora,

$$\hat{a}(\xi'', \xi') = \int_K e^{-i\langle x'', \xi'' \rangle} a(x'', \xi') dx''$$

Integrando por partes temos:

$$\hat{a}(\xi'', \xi') = \int_K (i)^{|\beta|-1} e^{-i\langle x'', \xi'' \rangle} (\xi''')^{-\beta} \partial_{x''}^{\beta} a(x'', \xi') dx''$$

Como $a \in S^m$ temos

$$|\hat{a}(\xi'', \xi')| \leq \tilde{C}_{\beta} |(\xi''')^{-\beta}| (1+|\xi'|)^m \implies$$

$$\implies (*) \quad |(\xi''')^{\beta}| |\hat{a}(\xi'', \xi')| \leq \tilde{C}_{\beta} (1+|\xi'|)^m$$

Fazendo $\beta = \beta_i = (0, \dots, 0, N, 0, \dots, 0)$ (N na i -ésima coordenada), temos

$$|\xi_i|^N |\hat{a}(\xi'', \xi')| \leq \tilde{C}_N (1+|\xi'|)^m \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \sum_{k \leq i \leq n} |\xi_i|^N |\hat{a}(\xi'', \xi')| \leq C_N (1+|\xi'|)^m$$

Para $|\xi''| > 1$, $\sum_{k < i \leq n} |\xi_i|^N \sim (1 + |\xi''|)^N, \quad \forall N$

Então

$$|\hat{a}(\xi'', \xi')| \leq C_N (1 + |\xi''|)^{-N} (1 + |\xi'|)^m \quad \forall N, |\xi''| > 1$$

Agora fazendo $\beta = (0, \dots, 0)$ em (*) temos

$$|\hat{a}(\xi'', \xi')| \leq \tilde{C} (1 + |\xi'|)^m$$

E para $|\xi''| \leq L$,

$$\begin{aligned} |\hat{a}(\xi'', \xi')| &\leq \tilde{C} (1 + |\xi'|)^m (1 + |\xi''|)^{-N} (1 + |\xi''|)^N \leq \\ &\leq \tilde{C} (1 + |\xi'|)^m (1 + |\xi''|)^{-N} (1 + L)^N = C_N (1 + |\xi'|)^m (1 + |\xi'|)^{-N} \end{aligned}$$

onde $C_N = \tilde{C} (1 + L)^N$

Temos, portanto, $\forall N$

$$|\hat{a}(\xi'', \xi')| \leq C_N (1 + |\xi''|)^{-N} (1 + |\xi'|)^m$$

Podemos escrever $\phi = \phi_1 + \phi_2$ onde $\phi_j \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $|\xi'| > C$ no $\text{supp } \phi_1$ e $|\xi''| > C$ no $\text{supp } \phi_2$ para algum $C > 0$, já que $0 \notin \text{supp } \phi$.

$$\text{supp } \phi_1 \subseteq B'_{R_0} \times B''_{R_1} \text{ e } \text{supp } \phi_2 \subseteq B'_{R_2} \times B''_{R_3}$$

$$\text{supp } \phi_1(\cdot, \cdot/R) \subseteq \left\{ C \leq |\xi'| \leq R_0, |\xi''| \leq R R_1 \right\} =: \Omega_1$$

$$\text{supp } \phi_2(\cdot, \cdot/R) \subseteq \left\{ |\xi'| \leq R_2, CR \leq |\xi''| \leq R R_3 \right\} =: \Omega_2$$

substituindo ϕ por $|\phi|$ temos:

$$\begin{aligned} \int |\hat{u}(\xi)|^2 |\phi(\xi/R)| d\xi &= (2\pi)^{2k} R^k \int |\hat{a}(\xi'', R\xi')|^2 |\phi(\xi', \xi''/R)| d\xi \leq \\ &\leq (2\pi)^{2k} R^k C_N \left(\int_{\Omega_1} M_R(\xi) d\xi + \int_{\Omega_2} N_R(\xi) d\xi \right) \end{aligned}$$

onde a primeira igualdade decorre de (II.a.3) e

$$M_R(\xi) = (1 + |\xi''|)^{-2N} (1 + R|\xi'|)^{2m} |\phi_1(\xi', \xi''/R)|$$

$$N_R(\xi) = (1 + |\xi''|)^{-2N} (1 + R|\xi'|)^{2m} |\phi_2(\xi', \xi''/R)|$$

Seja $L_1 = \max_{\Omega_1} |\phi_1(\xi', \xi''/R)|$ em Ω_1

Agora,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} N_R(\xi) d\xi &\leq L_2 \int_{\Omega_2} (1 + |\xi''|)^{-2N} (1 + R|\xi'|)^{2m} d\xi = \\ &= L_2 \int_{|\xi'| \leq R_2} (1 + R|\xi'|)^{2m} d\xi' \int_{CR \leq |\xi''| \leq RR_2} (1 + |\xi''|)^{-2N} d\xi'' \end{aligned}$$

UFPE/CCEN
MEI
Biblioteca

Temos que

$$\begin{aligned} \int_{|\xi'| \leq R_2} (1 + R|\xi'|)^{2m} d\xi' &= R^{2m} \int_{|\xi'| \leq R_2} (R^{-1} + |\xi'|)^{2m} d\xi' \leq \\ &\leq C_2 R^{2m} \quad \text{se } m \geq 0 \end{aligned}$$

Se $m < 0$ ocorre que

$$\begin{aligned} \int_{|\xi'| \leq R_2} (1 + R|\xi'|)^{2m} d\xi' &\leq \text{vol}(|\xi'| \leq R_2) R^{-2m} R^{2m} \leq \\ &\leq \text{vol}(|\xi'| \leq R_2) R^{-2m} \end{aligned}$$

Logo

$$\int_{|\xi'| \leq R_2} (1 + R|\xi'|)^{2m} d\xi' \leq C_3 R^{2|m|}, \quad R > 1, \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

Agora,

$$\int_{CR \leq |\xi''| \leq RR_2} (1 + |\xi''|)^{-2N} d\xi'' \leq (1 + CR)^{-N} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} (1 + |\xi''|)^{-N} d\xi''$$

Como a integral do lado direito da última desigualdade converge para $N > n - k$, temos

$$\int_{CR \leq |\xi''| \leq RR_2} (1 + |\xi''|)^{-2N} d\xi'' \leq C_4 R^{-N}$$

Escolhendo $N > 4|m|$, ficamos com

$$(II.a.4) \quad \int_{\Omega_2} N_R(\xi) d\xi \leq D_2 R^{2|m|-N} \leq D_2 R^{2m}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} M_R(\xi) d\xi &\leq L_1 \int_{\Omega_1} (1 + |\xi''|)^{-2N} (1 + R|\xi'|)^{2m} d\xi = \\ &= L_1 \int_{C \leq |\xi'| \leq R_0} (1 + R|\xi'|)^{2m} d\xi' \int_{|\xi''| \leq RR_1} (1 + |\xi''|)^{-2N} d\xi'' \end{aligned}$$

Temos

$$\int_{|\xi''| \leq RR_1} (1 + |\xi''|)^{-2N} d\xi'' \leq \int_{\mathbb{R}^{n-k}} (1 + |\xi''|)^{-2N} d\xi'' < \infty \quad \text{para}$$

$$N > (n - k)/2$$

E como

$$C \leq R^{-1} + |\xi'| \leq 1 + |\xi'|$$

Temos

$$\begin{aligned} R^{2m} \int_{C \leq |\xi'| \leq R_0} (1 + R|\xi'|)^{2m} d\xi' &\leq C_1 R^{2m} \\ C \leq |\xi'| \leq R_0 \end{aligned}$$

Portanto

$$(II.a.5) \quad \int_{\Omega_1} M_R(\xi) d\xi \leq D_1 R^{2m}$$

De (II.a.4) e (II.a.5) temos que

$$\int |\hat{u}(\xi)|^2 |\phi(\xi/R)| d\xi \leq CR^{2m+k} \quad R > 1 \quad \text{e portanto (II.a.1)}$$

Para a demonstração de (II.a.2) temos:

$$R^{-2m} \int_{\Omega_1} |\hat{a}(\xi'', R\xi')|^2 \phi_1(\xi', \xi''/R) d\xi =$$

$$= \int_{\Omega_1} |\hat{\alpha}(\xi'', R\xi')/R^m|^2 \phi_1(\xi', \xi''/R) d\xi$$

Daí, como $R^{-m} \alpha(x'', R\xi') \xrightarrow[\| \cdot \|_{L_2}]{R \rightarrow \infty} \alpha_0(x'', \xi') \quad \left[\text{onde } L_2 = L_2(\mathbb{R}^{n-k}) \right]$

pois

$$\| R^{-m} \alpha(x'', R\xi') - \alpha_0(x'', \xi') \|_{L_2}^2 =$$

$$= \int_K R^{-2m'} |\alpha(x'', R\xi') - \alpha_0(x'', R\xi')|^2 dx'' \leq$$

$$\leq \tilde{D} R^{-2} (R^{-1} + |\xi'|)^{2m'_1} \quad \text{onde } m'_1 = m' - 1, \text{ pois } \alpha - \alpha_0 \in S^{m'_1}$$

Temos ,

$$R^{-m} \hat{\alpha}(\xi'', R\xi') \xrightarrow[\| \cdot \|_{L_2}]{R \rightarrow \infty} \hat{\alpha}_0(\xi'', \xi') \implies$$

$$\implies |R^{-m} \hat{\alpha}(\xi'', R\xi')|^2 \xrightarrow[\| \cdot \|_{L_2}]{R \rightarrow \infty} |\hat{\alpha}_0(\xi'', \xi')|^2$$

Agora , como $\phi_1(\xi', \xi''/R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \phi_1(\xi', 0)$ pontualmente ,

$$|\phi_1(\xi', \xi''/R)| \leq M \quad \text{e} \quad |R^{-m} \hat{\alpha}(\xi'', R\xi')|^2 \xrightarrow[\| \cdot \|_{L_2}]{R \rightarrow \infty} |\hat{\alpha}_0(\xi'', \xi')|^2$$

podemos concluir do teorema da Convergência Dominada que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int |\hat{\alpha}(\xi'', R\xi')/R^m|^2 \phi_1(\xi', \xi''/R) d\xi =$$

$$= \int |\hat{\alpha}_0(\xi'', \xi')|^2 \phi_1(\xi', 0) d\xi$$

E temos, pela Fórmula de Parseval, que

$$\int |\hat{\alpha}_0(\xi'', \xi')|^2 \phi_1(\xi', 0) d\xi =$$

$$= (2\pi)^{n-k} \int \int |\alpha_0(x'', \xi')|^2 \phi_1(\xi', 0) dx'' d\xi'$$

Portanto ,

$$R^{-2m'} \int |\hat{a}(\xi'', R\xi')|^2 \phi_1(\xi', \xi''/R) d\xi \xrightarrow{R \rightarrow \infty}$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow \infty} (2\pi)^{n-k} \int \int |\alpha_0(x'', \xi')|^2 \phi(\xi', 0) dx'' d\xi'$$

E utilizando as considerações anteriores temos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-k-2m'} (2\pi)^{-n-k} \int |\hat{u}(\xi)|^2 \phi(\xi/R) d\xi =$$

$$= \int \int |\alpha_0(x'', \xi')|^2 \phi(\xi', 0) dx'' d\xi'$$

cqd .

Lema II.a.1 : Seja $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e assumamos que $x^\alpha D^\beta u \in {}^aH_{(-m-k/2)}$ para todo α e β com $|\alpha'| \geq |\beta'|$. Então u é da forma

$$u(x) = \int e^{i\langle x', \xi' \rangle} \tilde{a}(x'', \xi') d\xi'$$

com amplitude $\tilde{a} \in S^m(\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k)$.

Dem : Por hipótese, $\hat{u} \in C^\infty$.

Queremos mostrar, primeiramente

$$(II.a.6) \quad \int_{R/2 < |\xi| < 2R} |\xi^\beta D^\alpha \hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq C_{\alpha, \beta} R^{2m+k}, \quad |\alpha'| \geq |\beta'|$$

Se $x^\alpha D^\beta u \in {}^pH_\Delta$ então $v = D^\beta x^\alpha u \in {}^pH_\Delta$ (ver definição I.9 cap.1) pois

$$v = \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} (D^\gamma x^\alpha) D^{\beta-\gamma} u = \sum_{\substack{\gamma \leq \beta \\ \gamma \leq \alpha}} c_\gamma x^{\alpha-\gamma} D^{\beta-\gamma} u$$

Como $x^{\alpha-\gamma} D^{\beta-\gamma} u \in {}^pH_\Delta$ e ${}^pH_\Delta$ é um espaço vetorial temos

$$\sum_{\substack{\gamma \leq \beta \\ \gamma \leq \alpha}} c_\gamma x^{\alpha-\gamma} D^{\beta-\gamma} u \in {}^pH_\Delta$$

Temos

$$\begin{aligned}
 (\pi_j v)^\wedge(\eta) &= \int e^{i\langle x, \eta \rangle} \left[\int e^{i\langle x, \xi \rangle} \chi_{X_j}(\xi) \hat{v}(\xi) d\xi \right] dx = \\
 &= \int e^{-i\langle x, \eta \rangle} \mathcal{F}^{-1}(V_j)(x) dx = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(V_j))(\eta) = \\
 &= V_j(\eta), \text{ onde } V_j(\xi) = \chi_{X_j}(\xi) \hat{v}(\xi) \quad \text{onde} \\
 X_j &= \left\{ 2^{j-2} < |\xi| < 2^{j-1} \right\}
 \end{aligned}$$

Então

$$(II.a.7) \quad (\pi_j v)^\wedge(\eta) = V_j(\eta) = \chi_{X_j}(\eta) \hat{v}(\eta)$$

$$\begin{aligned}
 \int_{R/2 < |\xi| < 2R} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi &\stackrel{(\dots)}{\leq} \int_{2^{j-1} < |\xi| < 2^{j+2}} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \stackrel{(\dots)}{\leq} \sum_{i=1}^3 \int_{X_{j+i}} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi \stackrel{(\dots)}{=} \\
 &= \sum_{i=1}^3 \int |\pi_{j+i} v)^\wedge(\xi)|^2 d\xi \quad \text{para algum } j
 \end{aligned}$$

(.) : Pois dado $R \geq 1 \exists j : 2^j < R < 2^{j+1}$

(..): Pois $\left\{ 2^{j-1} < |\xi| < 2^{j+2} \right\} \subset X_{j+1} \cup X_{j+2} \cup X_{j+3} \cup X_{j+2}$

(....) : Segue de (II.a.7)

Seja $\Delta = -m - k/2$. Como, por hipótese, $\sup \|\pi_j v\|_\Delta < L_{\alpha, \beta} \forall \alpha, \beta$ tal que $|\alpha'| \geq |\beta'|$ temos que

$$(II.a.8) \quad \|\pi_j v\|_\Delta^2 = \int_{X_j} (1 + |\eta|^2)^\Delta |(\pi_j v)^\wedge(\eta)|^2 d\eta < L_{\alpha, \beta}^2 \quad \forall \alpha, \beta : |\alpha'| \geq |\beta'|$$

Em X_j ,

$$2^{j-2} < |\eta| < 2^{j-1} \longrightarrow 2^{2(j-2)} < |\eta|^2 < 2^{2(j-1)}$$

O que implica

$$(1 + 2^{2(j-2)})^\Delta > (1 + |\eta|^2)^\Delta > (1 + 2^{2(j-1)})^\Delta \quad \text{se } \Delta < 0.$$

Logo,

$$(II.a.9) \quad (1 + |\eta|^2)^\Delta > (1 + 2^{2(j-1)})^\Delta \quad \text{em } X_j$$

O caso $\lambda > 0$ decorre analogamente.

De (II.a.8) e (II.a.9) temos:

$$\int_{X_j} |(\pi_j v)^\wedge(\eta)|^2 d\eta < L_{\alpha, \beta}^2 (1+2^{2(j-1)})^{-\lambda}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_{R/2 < |\xi| < 2R} |\hat{v}(\xi)|^2 d\xi &\leq \sum_{i=1}^3 \int |(\pi_{j+i} v)^\wedge(\xi)|^2 d\xi \leq \\ &\leq L_{\alpha, \beta}^2 \left[(1+2^{2j})^{-\lambda} + (1+2^{2(j+1)})^{-\lambda} + (1+2^{2(j+2)})^{-\lambda} \right] \stackrel{(\dots)}{\leq} \\ &\stackrel{(\dots)}{\leq} L_{\alpha, \beta}^2 \left[(1+R^2)^{-\lambda} + (1+4R^2)^{-\lambda} + (1+16R^2)^{-\lambda} \right] \stackrel{(\dots)}{\leq} \\ &\stackrel{(\dots)}{\leq} C_{\alpha, \beta} R^{-2\lambda} = C_{\alpha, \beta} R^{2m+k} \end{aligned}$$

(.) : Pois $R > 2^j$

(...): Pois $(1+R^2)^{-\lambda} \sim R^{-2\lambda}$

$R > 1$

Agora

$$\hat{v}(\xi) = \xi^\beta (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} \hat{u}(\xi)$$

E decorre a desigualdade (II.a.6) com $R \geq 1$ e $|\alpha'| \geq |\beta'|$

Faça $|\beta'| = 0$ e $|\beta''| > N + m + k/2$

$\beta = (\beta', \beta'')$ onde $\beta' = (\beta_1, \dots, \beta_l)$ e $\beta'' = (\beta_{l+1}, \dots, \beta_n)$

Queremos mostrar que

$$(II.a.10) \quad \int_{|\xi-\eta|<1} |D^{\alpha} \hat{u}(\eta)|^2 d\eta \leq C_{\alpha, N} |\xi|^{-2N} \text{ se } |\xi''| \geq |\xi'|, \forall N$$

Para $|\xi| \leq 3/2$ ($|\xi| \neq 0$) temos

$$\int_{B_{\xi}(1)} |D^{\alpha} \hat{u}(\eta)|^2 d\eta \leq \int_{\bar{B}_0(3/2)} |D^{\alpha} \hat{u}(\eta)|^2 d\eta = C_{\alpha} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \int_{B_{\xi}(1)} |D^{\alpha} \hat{u}(\eta)|^2 d\eta \leq C_{\alpha} |\xi|^{2N} |\xi|^{-2N} \leq C_{\alpha} (3/2)^{2N} |\xi|^{-2N} =$$

$$= C_{\alpha, N} |\xi|^{-2N}$$

Para $|\xi| > 3/2$

$$(II.a.11) \quad \int_{|\xi-\eta|<1} |\eta^{\beta} D^{\alpha} \hat{u}(\eta)|^2 d\eta \leq \int_{|\xi|-1 \leq |\eta| \leq |\xi|+1} |\eta^{\beta} D^{\alpha} \hat{u}(\eta)|^2 d\eta \stackrel{(\cdot\cdot)}{\leq} C_{\alpha, N} R^{2m+k} \leq$$

$$\stackrel{(\cdot\cdot\cdot)}{\leq} C'_{\alpha, N} |\xi|^{2m+k}$$

($\cdot\cdot$) : Decorre de (II.a.6)

($\cdot\cdot\cdot$): Pois $R \leq 2|\xi|$

Seja $j = \left[N + m + k/2 \right] + 1$ e $\beta'' = \beta^i = (0, \dots, j, \dots, 0)$, j na i -ésima coordenada

$\eta^{\beta^i} = \eta_i^j$, e como $|\beta'| = 0$ temos de (II.a.11) :

$$\int_{|\xi-\eta|<1} \left(\sum_{i=l+1}^n |\eta_i^j|^2 |D^{\alpha} \hat{u}(\eta)|^2 \right) d\eta \leq C_{\alpha, N} |\xi|^{2m+k}$$

Agora,

$$\sum_{i=l+1}^n |\eta_i^j|^{2j} \stackrel{(1)}{\geq} C |\eta''|^{2j} \stackrel{(2)}{\geq} C (|\xi''|-1)^{2j} = \tilde{C} (2|\xi''|-2)^{2j} \stackrel{(3)}{\geq}$$

$$\stackrel{(3)}{\geq} \tilde{C} |\xi|-2)^{2j}$$

(1): Por homogeneidade de η'' .

(2): $|\eta-\xi| < 1 \longrightarrow |\eta''-\xi''| < 1 \longrightarrow ||\eta''|-|\xi''|| < 1 \longrightarrow |\eta''| > |\xi''|-1$.

(3): $|\xi| \leq |\xi'| + |\xi''| \leq 2|\xi''|$ se $|\xi''| \geq |\xi'|$

Temos então

$$C (|\xi| - 2)^{2j} \int_{|\xi-\eta|<1} |D^\alpha \hat{u}(\eta)|^2 d\eta \leq C_{\alpha,N} |\xi|^{2m+k}$$

Como $C (|\xi| - 2)^{2j} \sim |\xi|^{2j}$ para $|\xi| \gg 1$, temos

$$\int_{|\xi-\eta|<1} |D^\alpha \hat{u}(\eta)|^2 d\eta \leq C_{\alpha,N} \frac{|\xi|^{2m+k}}{|\xi|^{2j}} \leq C_{\alpha,N} |\xi|^{-2N} \text{ se } |\xi''| \geq |\xi'|$$

e para $\forall N$, pois $j > N + m + k/2$.

Utilizando o lema I.1 e a desigualdade (II.a.10) temos

$$|D^\alpha \hat{u}(\xi)|^2 \leq C_{\alpha,N} |\xi|^{-2N} \implies |D^\alpha \hat{u}(\xi)| \leq C'_{\alpha,N} |\xi|^{-N}$$

se $|\xi''| \geq |\xi'|$.

Para proceder com o caso oposto introduziremos

$$U_R(\xi) = \hat{u}(R\xi', \xi'')/R^m$$

Seja E_R o anel elipsoidal definido por

$$1/4 < |\xi'|^2 + |\xi''/R|^2 < 4.$$

$$\int_{E_R} |\xi^\beta D^\alpha U_R(\xi)|^2 d\xi = R^{2C} |\alpha'|^{-m} \int_{E_R} |\xi^\beta (D^\alpha \hat{u})(R\xi', \xi'')|^2 d\xi =$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{(\dots)}{=} R^{2(m-k/2)} \int_{R/2 < |\eta| < 2R} |\eta^\beta D^\alpha \hat{u}(\eta)|^2 d\eta \stackrel{(\dots)}{\leq} R^{2(m-k/2)} C_{\alpha\beta} R^{2m+k} = \\ & = C_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

quando $R \geq 1$ e $|\alpha'| = |\beta'|$.

(.) : Fazendo $\xi' = \eta'/R$, $\xi'' = \eta''$ e $|\alpha'| = |\beta'|$

(..) : Utilizando a desigualdade (II.a.6)

Portanto,

$$(II.a.12) \int_{E_R} |\xi^\beta D^\alpha U_R(\xi)|^2 d\xi \leq C_{\alpha\beta}, \quad |\alpha'| = |\beta'|.$$

Agora, demonstraremos a seguinte desigualdade :

$$(II.a.13) \quad |D^\alpha U_R(\xi)| \leq C'_{\alpha,N} (1 + |\xi''|)^{-N}, \quad |\xi'| = 1 \text{ e } |\xi''| < R$$

Afirmacão II.a.1 : Dados $|\xi'| = 1$ e $|\xi''| < R$,

$\exists \varepsilon_0$ tal que se $|\eta - \xi| < \varepsilon_0$ então

$$1/4 < |\eta'|^2 + |\eta''|^2/R^2 < 4, \quad R \geq 1$$

Dem : Trivial , basta tomar $\varepsilon_0 = 1/2$.

Usando o lema I.1 para a bola de raio $\varepsilon_0 \leq 1/2$, $\alpha > n/2$, temos, tomando $\gamma'' = (0, \dots, N, \dots, 0)$, N na j -ésima coordenada

$$\begin{aligned} & |\xi''\gamma''|^2 |D^\alpha U(\xi)|^2 \leq \\ & \leq C \int_{|\eta-\xi| < \varepsilon_0} |\xi''\gamma''|^2 \left[\sum_{|\beta|=4} |D^{\beta+\alpha} U_R(\eta)|^2 + |D^\alpha U_R(\eta)|^2 \right] d\eta \leq \\ & \leq C \int_{|\eta-\xi| < \varepsilon_0} \left[\sum_{|\beta|=4} kCN \left(|\eta''|^2 |\gamma''| + \varepsilon_0^2 \right) \left(\sum_{|\beta|=4} |D^{\beta+\alpha} U_R(\eta)|^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. |D^\alpha U_R(\eta)|^2 \right) \right] d\eta = \\ & = C \int_{|\eta-\xi| < \varepsilon_0} \left[\sum_{|\delta''| \leq |\gamma''|} C_{\delta''}^{(N)} \eta''^{2\delta''} \right] \left[\sum_{|\beta|=4} |D^{\beta+\alpha} U_R(\eta)|^2 + |D^\alpha U_R(\eta)|^2 \right] d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1): |\xi''\gamma''|^2 & \leq |\xi''|^2 |\gamma''| \leq C (|\eta''| + \varepsilon_0)^2 |\gamma''| \leq \\ & \leq kCN (|\eta''|^2 |\gamma''| + \varepsilon_0^2) \end{aligned}$$

$$2): kCN (|\eta''|^2 |\gamma''| + \varepsilon_0^2) = \sum_{|\delta''| \leq |\gamma''|} C_{\delta''}^{(N)} \eta''^{2\delta''}$$

gora, estimaremos :

$$III.a.14) \quad \int_{|\eta-\xi| < \varepsilon_0} \eta''^{2\delta''} \eta'^{2\delta'} \eta'^{-2\delta'} |D^{\beta+\alpha} U_R(\eta)|^2 d\eta, \text{ tomando } |\delta'| = |\alpha+\beta|,$$

$$(II.a.15) \int_{|\eta-\xi| < \varepsilon_0} \eta''^{2\delta''} \eta'^{2\delta'} \eta'^{-2\delta'} |D^\alpha U_R(\eta)|^2 d\eta, \text{ tomando } |\delta'| = |\alpha'|$$

$$\sum |\xi'_j|^2 = 1 \implies \exists j : |\xi'_j|^2 \geq 1/k \implies |\xi'_j|^2 \geq 1/\sqrt{k}$$

Para um ε_0 suficientemente pequeno temos

$$|\xi'_j - \eta'_j| < |\xi - \eta| < \varepsilon_0 < 1/2\sqrt{k} \implies |\eta'_j| > 1/2\sqrt{k}$$

Então, fazendo $\delta' = (0, \dots, |(\alpha+\beta)'|, 0, \dots, 0)$ com $|(\alpha+\beta)'|$ na j -ésima coordenada, temos em (II.a.14) :

$$\int_{|\eta-\xi| < \varepsilon_0} \eta^{2\delta'} \eta'^{-2\delta'} |D^{\beta+\alpha} U_R(\eta)|^2 d\eta =$$

$$= \int_{|\eta-\xi| < \varepsilon_0} \eta^{-2C|\alpha'+\beta'|} |\eta^\delta D^{\beta+\alpha} U_R(\eta)|^2 d\eta <$$

$$\left(1/2\sqrt{k}\right)^{-2C|\alpha'+\beta'|} \int_{|\eta-\xi| < \varepsilon_0} |\eta^\delta D^{\beta+\alpha} U_R(\eta)|^2 d\eta \leq$$

$$< \left(1/2\sqrt{k}\right)^{-2C|\alpha'+\beta'|} \int_{E_R} |\eta^\delta D^{\beta+\alpha} U_R(\eta)|^2 d\eta < C_{\alpha, \beta, N}$$

(.): Pela afirmação (II.a.1) onde E_R é o anel elipsoidal

$$1/4 < |\eta'|^2 + |\eta''|^2/R^2 < 4$$

(...): Pela desigualdade (II.a.12)

Analogamente, fazendo $\delta' = (0, \dots, |\alpha'|, \dots, 0)$ com $|\alpha'|$ na j -ésima coordenada, temos em (II.a.15) :

$$\int_{|\eta-\xi| < \varepsilon_0} \eta''^{2\delta''} \eta'^{2\delta'} \eta'^{-2\delta'} |D^\alpha U_R(\eta)|^2 d\eta = \int_{|\eta-\xi| < \varepsilon_0} |\eta^\delta D^\alpha U_R(\eta)|^2 \eta'^{-2\delta'} d\eta \leq$$

$$\leq \tilde{C}_{\alpha, \beta, n}$$

Portanto,

$$|\xi_j''|^{2N} |D^\alpha U_R(\xi)|^2 \leq \tilde{C}_{\alpha, N} \implies |\xi_j''|^N |D^\alpha U_R(\xi)|^2 \leq \tilde{C}_{\alpha, N} \implies$$

$$\sum_{j=k+1}^n \xi_j''^{2N} |D^\alpha U_R(\xi)|^2 \leq \tilde{C}_{\alpha, N} \stackrel{(\cdot)}{\implies} |\xi''|^N |D^\alpha U_R(\xi)| \leq C_{\alpha, N}$$

E como $|\xi''| \sim 1 + |\xi''|$ para $|\xi''| \gg 1$ temos que

$$(1 + |\xi''|)^N |D^\alpha U_R(\xi)| \leq C'_{\alpha, N} \text{ para } |\xi''| \gg 1$$

($\cdot$): Decorre da homogeneidade de ξ , ou seja,

$$\sum_{j=k+1}^n \xi_j''^{2N} \geq C \left(\sum_{j=k+1}^n \xi_j''^2 \right)^N = C |\xi''|^{2N}$$

Isto demonstra (II.a.13).

Agora,

$$D^\alpha \hat{u}(R\xi', \xi'') / R^m = D^\alpha \hat{u}(R\xi', \xi'') R^{|\alpha'| - m} \implies$$

$$\implies |D^\alpha \hat{u}(R\xi', \xi'')| R^{|\alpha'| - m} \leq C'_{\alpha, N} (1 + |\xi''|)^{-N}, \text{ com}$$

$$|\xi'| = 1, |\xi''| < R.$$

A última implicação ocorre devido à desigualdade (II.a.13).

Seja $\eta = (\eta', \eta'')$ onde $\eta' = R\xi'$ e $\eta'' = \xi''$.

Então

$$|D^\alpha \hat{u}(\eta', \eta'')| \leq R^{m - |\alpha'|} C'_{\alpha, N} (1 + |\eta''|)^{-N}$$

E como $|\xi'| = 1$ temos que $|\eta'| = R$, portanto podemos escrever

$$|D^\alpha \hat{u}(\xi', \xi'')| \leq C'_{\alpha, N} |\xi'|^{m - |\alpha'|} (1 + |\xi''|)^{-N}, \quad |\xi''| < |\xi'|$$

Utilizando que

$$|\xi'|^{m - |\alpha'|} \sim (1 + |\xi'|)^{m - |\alpha'|} \text{ para } |\xi'| \gg 1$$

temos

$$(II.a.16) \quad |D^\alpha \hat{u}(\xi', \xi'')| \leq C'_{\alpha, N} (1 + |\xi'|)^{m - |\alpha'|} (1 + |\xi''|)^{-N}$$

onde $|\xi''| < |\xi'|$.

Afirmacão II.a.2 : Se

$$|D^\alpha \hat{u}(\xi)| \leq C_{\alpha, N} (1 + |\xi|)^{-N}, \quad |\xi''| < |\xi'| \quad \text{então}$$

$$|D^\alpha \hat{u}(\xi)| \leq C_{\alpha, N} (1 + |\xi'|)^{m-|\alpha'|} (1 + |\xi''|)^{-N}, \quad |\xi''| < |\xi'|$$

Dem : Se $|\alpha'| \leq m$:

$$I) \quad (1 + |\xi'|)^{m-|\alpha'|} \geq 1$$

$$II) \quad (1 + |\xi|)^{-N} \leq (1 + |\xi''|)^{-N}$$

Então

$$|D^\alpha \hat{u}(\xi)| \leq C'_{\alpha, N} (1 + |\xi|)^{-N} \leq$$

$$\leq C'_{\alpha, N} (1 + |\xi'|)^{m-|\alpha'|} (1 + |\xi''|)^{-N}$$

Se $|\alpha'| > m$:

$$III) \quad (1 + |\xi|)^{m-|\alpha'|} \leq (1 + |\xi'|)^{m-|\alpha'|}$$

$$IV) \quad (1 + |\xi|)^{-N} \leq (1 + |\xi''|)^{-N}$$

Fazendo $N = \tilde{N} + |\alpha'| - m$, temos

$$(1 + |\xi|)^{-N} = (1 + |\xi|)^{-(\tilde{N} + |\alpha'| - m)} \leq$$

$$(1 + |\xi'|)^{m-|\alpha'|} (1 + |\xi''|)^{-\tilde{N}}$$

Logo

$$|D^\alpha \hat{u}(\xi)| \leq C_{\alpha, N} (1 + |\xi|)^{-N} \leq$$

$$\leq C_{\alpha, N} (1 + |\xi'|)^{m-|\alpha'|} (1 + |\xi''|)^{-N}, \quad |\xi''| < |\xi'|$$

q.d.

Dessa afirmação decorre que a estimativa (II.a.16) é válida para

tudo ξ .

Faça, agora,

$$\tilde{a}(x'', \xi') = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x'', \xi'' \rangle} \hat{u}(\xi) d\xi''$$

Afirmacão II.a.3 : $\tilde{a} \in S^m(\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k)$

Dem:

$$\begin{aligned} \left| D_{\xi}^{\alpha} D_{x''}^{\beta} \tilde{a}(x'', \xi') \right| &= \left| C (2\pi)^{-n} \int D_{\xi}^{\alpha} \hat{u}(\xi) (\xi'')^{\beta} e^{i\langle x'', \xi'' \rangle} d\xi'' \right| \leq \\ &\leq C \int \left| D_{\xi}^{\alpha} \hat{u}(\xi) \right| \left| (\xi'')^{\beta} \right| d\xi'' \stackrel{(\cdot)}{\leq} \\ &\stackrel{(\cdot)}{\leq} C_{\alpha, N} \int (1+|\xi'|)^{m-|\alpha|} (1+|\xi''|)^{-N} |\xi''|^{| \beta |} d\xi'' \leq \\ &\leq C_{\alpha, N} (1+|\xi'|)^{m-|\alpha|} \int (1+|\xi''|)^{-N} |\xi''|^{| \beta |} d\xi'' \end{aligned}$$

($\cdot$) : Decorre da desigualdade (II.a.16), onde foi verificada a sua validade para todo ξ .

Fazendo $N = |\beta| + \tilde{N}$ temos

$$\begin{aligned} \int \frac{|\xi''|^{| \beta |}}{(1+|\xi''|)^{|\beta| + \tilde{N}}} d\xi'' &= \int \left(\frac{|\xi''|}{1+|\xi''|} \right)^{|\beta|} \frac{1}{(1+|\xi''|)^{\tilde{N}}} d\xi'' \leq \\ &\leq \int \frac{1}{(1+|\xi''|)^{\tilde{N}}} d\xi'' < \infty, \text{ escolhendo } \tilde{N} \text{ adequadamente.} \end{aligned}$$

cqd

Comentário: Tomando

$$\tilde{a}(x'', \xi') = (2\pi)^{-n} \int \hat{u}(\xi) e^{i\langle x'', \xi'' \rangle} d\xi'' \quad \text{temos}$$

$$u(x) = \int e^{i\langle x', \xi' \rangle} \tilde{a}(x'', \xi') d\xi', \quad \text{pois}$$

$$\begin{aligned} \int e^{i\langle x', \xi' \rangle} \tilde{a}(x'', \xi') d\xi' &= \\ \int e^{i\langle x', \xi' \rangle} (2\pi)^{-n} \int \hat{u}(\xi) e^{i\langle x'', \xi'' \rangle} d\xi'' d\xi' &= \\ = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \hat{u}(\xi) d\xi &= (\mathcal{F}^{-1} \hat{u})(x) = u(x) \end{aligned}$$

Teorema II.a.1 (1ª versão): Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$, aberto e seja $u \in \mathcal{D}'(X)$. Então

$$u(x) = \int e^{i\langle x', \xi' \rangle} a(x, \xi') d\xi', \quad a \in S_{loc}^m(X \times \mathbb{R}^k) \quad \Leftrightarrow$$

$L_1 \circ \dots \circ L_N u \in \mathcal{H}_{(-m-k/2)}^{loc} \quad \forall L_1, \dots, L_N$ operadores diferenciais de 1ª ordem tangentes ao plano $x' = 0$.

A implicação $(\Rightarrow)$ é válida com $a \in S^m(X \times \mathbb{R}^k)$,

Teorema II.a.1 (2ª versão): Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$, aberto e seja $u \in \mathcal{E}'(X)$. Então

$$u(x) = \int e^{i\langle x', \xi' \rangle} a(x, \xi') d\xi', \quad a \in S^m(X \times \mathbb{R}^k) \quad \Leftrightarrow$$

$L_1 \circ \dots \circ L_N u \in \mathcal{H}_{(-m-k/2)}^{loc} \quad \forall L_1, \dots, L_N$ operadores diferenciais de 1ª ordem tangentes ao plano $x' = 0$.

Dem Teorema II.a.1 (1ª versão):

$\Rightarrow$ Multiplicando u por uma $\phi \in C_0^\infty$ podemos supor que $a \in S^m$.

Para $N = 1$: $L_1 := L$

$$L = \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \left[\frac{\partial}{\partial x_j} := \partial_j \right]$$

Pelo lema I.3 temos que L pode ser escrito na seguinte forma:

$$L = \sum_{i, j \leq k} b_{ij}(x) x_i \partial_j + \sum_{j > k} b_j(x) \partial_j \quad \text{onde}$$

b_{ij} e $b_j \in C^\infty$.

Basta, então, mostrar para

$$L = x_i \partial_j \quad i, j \leq k$$

$$L = \partial_j \quad j > k$$

Pois o espaço $\mathcal{H}_4^{loc}$ é invariante por multiplicação de funções C^∞ .

Para $j > k$:

$$\partial_j u(x) = \int e^{i\langle x', \xi' \rangle} \partial_j a(x, \xi') d\xi' \quad \text{onde } \partial_j a(x, \xi') \in S^m$$

pois $a(x, \xi') \in S^m$.

Decorre da afirmação I.2 que $\partial_j u \in {}^{\text{loc}}\mathcal{H}_{(-m-k/2)}$

Agora, vamos verificar que $b(x) x_l \partial_j u(x) \in \mathcal{H}_{(-m-k/2)}$ onde $b \in C_0^\infty$

e $l, j \leq k$:

$$\begin{aligned} \partial_j u(x) &= \int i e^{i\langle x', \xi' \rangle} \xi_j a(x, \xi') d\xi' + \\ &+ \int e^{i\langle x', \xi' \rangle} \partial_j a(x, \xi') d\xi' \end{aligned}$$

Então temos

$$b(x) x_l \partial_j u(x) = \int f_1(x, \xi') d\xi' + \int f_2(x, \xi') d\xi' \quad \text{onde}$$

$$f_1(x, \xi') = i e^{i\langle x', \xi' \rangle} x_l \xi_j \tilde{a}(x, \xi') \quad \text{sendo}$$

$$\tilde{a}(x, \xi') = a(x, \xi') b(x)$$

$$f_2(x, \xi') = e^{i\langle x', \xi' \rangle} b(x) x_l \partial_j a(x, \xi')$$

Pela afirmação I.2 temos que

$$\int f_2(x, \xi') d\xi' \in \mathcal{H}_{(-m-k/2)}$$

$$\begin{aligned} \int f_1(x, \xi') d\xi' &= \int \partial_{\xi_l} e^{i\langle x', \xi' \rangle} \xi_j \tilde{a}(x, \xi') d\xi' = \\ &= - \int e^{i\langle x', \xi' \rangle} \partial_{\xi_l} \left[\xi_j \tilde{a}(x, \xi') \right] d\xi' \end{aligned}$$

Se $l \neq j$:

$$\int f_1(x, \xi') d\xi' = - \int e^{i\langle x', \xi' \rangle} \partial_{\xi_l} \left[\xi_j \tilde{a}(x, \xi') \right] d\xi' =$$

$$= - \int e^{i\langle x', \xi' \rangle} \xi_j \left[\partial_{\xi_l} \tilde{a}(x, \xi') \right] d\xi'$$

Se $l = j$:

$$\int f_1(x, \xi') d\xi' = - \int e^{i\langle x', \xi' \rangle} \left[\tilde{a}(x, \xi') + \xi_l \partial_{\xi_l} \tilde{a}(x, \xi') \right] d\xi'$$

Concluimos, pelas afirmações I.2 e I.3, que

$$\int f_1(x, \xi') d\xi' \in \mathcal{H}_{(-m-k/2)}^{\infty}$$

Temos, portanto, que $b(x) x_l \partial_j u(x) \in \mathcal{H}_{(-m-k/2)}^{\infty}$ onde $b \in C_0^{\infty}$

e $l, j \leq k$.

Chegamos, então, que $Lu \in \mathcal{H}_{(-m-k/2)}^{loc}(X)$

Suponha que $L_1 \circ \dots \circ L_N u \in \mathcal{H}_{(-m-k/2)}^{loc}(X)$

$$\forall \phi \in C_0^{\infty}, \phi L_1 \circ \dots \circ L_N \circ L_{N+1} u = \phi L_1 \circ \dots \circ L_N \psi L_{N+1} u \text{ onde}$$

$\psi \equiv 1$ no $\text{supp } \phi$ e $\psi \in C_0^{\infty}$.

Pelas observações anteriores temos que $\psi L_{N+1} u$ é da forma

$$\int e^{i\langle x', \xi' \rangle} \tilde{a}(x, \xi') d\xi' \text{ onde } \tilde{a} \in S^m.$$

Por hipótese de indução temos que

$$\phi L_1 \circ \dots \circ L_N (\psi L_{N+1} u) \in \mathcal{H}_{(-m-k/2)}^{\infty}, \forall \phi \in C_0^{\infty}$$

implica que $L_1 \circ \dots \circ L_N \circ L_{N+1} u \in \mathcal{H}_{(-m-k/2)}^{loc}$

cq.d

Agora procederemos com a demonstração de $(\Leftarrow)$ do teorema II.a.1 (1ª versão):

Sejam $\psi_j \in C_0^\infty(X)$ com suporte localmente finito e $\sum \psi_j^2 = 1$

Temos $\psi_j u(x) \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$.

Por hipótese temos que $L_1 \circ \dots \circ L_N u \in \mathcal{H}_{(-m-k/2)}^{loc}$ ou seja

$$\varphi L_1 \circ \dots \circ L_N u \in \mathcal{H}_{(-m-k/2)}^{loc} \text{ para } \forall \varphi \in C_0^\infty.$$

Decorre das afirmações I.4 e I.5 que

$$x^\alpha D^\beta \psi_j u \in \mathcal{H}_{(-m-k/2)} \text{ para } \forall \alpha, \beta \text{ tal que } |\alpha'| \geq |\beta'|.$$

Segue do lema II.a.1 que

$$\psi_j u(x) = \int e^{i\langle x', \xi' \rangle} \tilde{a}_j(x'', \xi') d\xi' \text{ onde } \tilde{a}_j \in S^m(\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k)$$

Agora,

$$\psi_j^2 u(x) = \int e^{i\langle x', \xi' \rangle} \psi_j(x) \tilde{a}_j(x'', \xi') d\xi'$$

$$\text{Afirmação II.a.4 : } a(x, \xi') = \sum \psi_j \tilde{a}_j(x'', \xi') \in S_{loc}^m(\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k)$$

$$\begin{aligned} \text{Dem : } \forall \phi \in C_0^\infty \text{ temos } \phi(x) a(x, \xi') &= \sum \psi_j(x) \phi(x) \tilde{a}_j(x'', \xi') = \\ &= \sum_{\text{soma finita}} \psi_j(x) \phi(x) \tilde{a}_j(x'', \xi'). \end{aligned} \text{ A última igualdade se dá}$$

porque as ψ_j tem suporte localmente finito.

Como $\tilde{a}_j \in S^m$ e $\psi_j(x) \phi(x) \in C_0^\infty$, temos

$$\psi_j(x) \phi(x) \tilde{a}_j(x'', \xi') \in S^m$$

O que implica que

$$\phi(x) a(x, \xi') \in S^m \text{ para } \forall \phi \in C_0^\infty$$

E portanto temos

$$a(x, \xi') \in S_{loc}^m.$$

Com isto demonstramos o teorema II.a.1 (1ª versão).

Observação Importante : O método acima não garante que $\alpha(x, \xi) \in S^m$.

Contra-exemplo: Seja $X = \mathbb{R}^2$, $\psi \in C_0^\infty$, $\psi|_{\overline{B}_{1/2}(0)} \equiv 1$, $\psi \geq 0$ e $S(\psi) \subset B_{3/4}(0)$.

Considere $\alpha(x, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi(x_1, x_2 - n)$ onde $a_n = \text{cte} > 0$.

$$\text{Seja } u(x) = \int e^{ix_1 \xi_1} \alpha(x_1, x_2, \xi_1) d\xi_1$$

Afirmção II.a.5 : $\alpha \in S_{lac}^0$.

Dem : Para $\forall \phi \in C_0^\infty(X)$ temos

$$\phi \alpha = \sum_{\substack{\text{soma} \\ \text{finita}}} a_n \phi(x_1, x_2) \psi(x_1, x_2 - n)$$

$$\text{Como } \left| a_n \partial_x^\alpha \left[\phi(x_1, x_2) \psi(x_1, x_2 - n) \right] \right| \leq a_n \tilde{C}_{\alpha, n}$$

$$\text{onde } \tilde{C}_{\alpha, n} = \max_{(x_1, x_2) \in \text{supp } f_{\alpha, n}} |f_{\alpha, n}(x_1, x_2)|, \quad \text{sendo } f_{\alpha, n}(x_1, x_2) =$$

$$= \partial_x^\alpha \phi(x_1, x_2) \psi(x_1, x_2 - n) \text{ temos que}$$

$$\left| \partial_x^\alpha \phi(x_1, x_2) \alpha(x_1, \xi_1) \right| \leq \sum_{\substack{\text{soma} \\ \text{finita}}} |a_n f_{\alpha, n}(x_1, x_2)| \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{\text{soma} \\ \text{finita}}} a_n \tilde{C}_{\alpha, n} = C_\alpha.$$

Logo $\alpha \in S_{lac}^0$.

Então temos, pelo teorema II.a.1 (1ª versão), que

$$L_1 \circ \dots \circ L_N u \in \mathcal{H}_{(-1/2)}^{lac}.$$

Seja $\psi_j(x_1, x_2) = \psi(0, x_2 - j)$

$$\begin{aligned} \sum \psi_j(x) &\geq 1 \quad \forall x \text{ pois, se } x_2 \in [j-1/2, j+1/2] \rightarrow \\ \Rightarrow x_2 - j &\in [-1/2, 1/2], \text{ logo } \psi(0, x_2 - j) = 1 \Rightarrow \\ \psi_j(x_1, x_2) &= 1 \quad \left[\forall x \exists j \text{ tal que } \psi_j(x) = 1 \right]. \end{aligned}$$

Tome, agora, $\varphi(x) = \frac{\psi_n(x)}{\sqrt{\sum \psi_n^2(x)}}$

$$\sum \varphi_n^2(x) = 1, \quad 0 < \varphi_n \leq 1, \quad \varphi_n \in C_0^\infty.$$

$$\varphi_n(x)u(x) = \int e^{ix_1 \cdot \xi_1} \varphi_n(x) a(x, \xi_1) d\xi_1$$

UFPE CCEN
MEI
Biblioteca

Definamos $\tilde{a}_n = \varphi_n(x) a(x, \xi_1)$

Como $a(x, \xi_1) \in S_{loc}^0$ e $\varphi_n \in C_0^\infty$ temos $\tilde{a}_n(x, \xi_1) \in S^0$.

$$\sum_n \varphi_n^2(x) u(x) = \int \left(\sum_n \varphi_n^2(x) \tilde{a}_n(x, \xi_1) \right) e^{ix_1 \cdot \xi_1} d\xi_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x) = \int e^{ix_1 \cdot \xi_1} a(x, \xi_1) d\xi_1$$

Afirmacoo II.a.6 : $a \notin S^j \quad \forall j \in \mathbb{R}$, se $a_l = a(0, 0, 0)$

$$a_l \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} +\infty$$

Dem: Trivial .

Teorema da Caracterização das Distribuições Conormais

Teorema II.a.2 : Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$, aberto, Y definido por $x' = (x_1, \dots, x_k) = 0$ e $E = X \times \mathbb{R}^N$, então para $\forall u \in \mathcal{D}'(X, E)$ com suporte compacto temos que u é da forma

$$u(x) = \int e^{i\langle x', \xi' \rangle} \alpha(x'', \xi') d\xi'$$

onde $\alpha \in S^{m+(n-2k)/4}(\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k; \mathbb{R}^N) \iff u \in \mathcal{I}^m(X, Y; E)$.

Comentário: $X = \cup X_i$, X_i vizinhanças trivializadoras. Como $u \in \mathcal{D}'(X, E)$, $u = \{u^i\}_{i \in \Lambda}$, onde $u^i \in \mathcal{D}'(X_i; \mathbb{R}^N)$, $u^i = (u_1^i, \dots, u_N^i)$ e $u_j^i \in \mathcal{D}'(X_i) \forall j, 1 \leq j \leq N$.

Dizer que u tem suporte compacto significa dizer que $u_j^i \in \mathcal{E}'(X_i)$. E/por definição de $\mathcal{I}^m(X, Y; E)$ basta ver que para cada j

$$u_j^i(x) = \int e^{i\langle x', \xi' \rangle} \alpha_j^i(x'', \xi') d\xi' \quad \text{onde}$$

$\alpha_j^i \in S^{m+(n-2k)/4}(\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k) \iff L_1 \dots L_N u_j^i \in \mathcal{H}_{(-m-n/4)}^{loc}(X_i)$
 $\forall L_1, \dots, L_N$ op. def. de 1ª ordem tangentes ao plano $x' = 0$.

Dem: $\Rightarrow$ Temos pelo teorema II.a.1 (2ª versão) que

$$L_1 \dots L_N u_j^i \in \mathcal{H}_{(-m'-k/2)}^{loc}(X_i) \quad \text{onde } m' = m + (n-2k)/4$$

Agorá ,

$$-m' - k/2 = -m - n/4 + k/2 - k/2 = -m - n/4 .$$

Logo

$$L_1 \dots L_N u_j^i \in \mathcal{H}_{(-m-n/4)}^{loc}(X_i) .$$

$\Leftarrow$ Temos que

$L_1 \dots L_N u_j^i \in \mathcal{H}_{(-m', -k/2)}^{loc}(X_i), \forall L_1, \dots, L_N$ op. dif. de 1ª ordem tangente ao plano $x' = 0$

O que implica, pelo teorema II.a.1 (2ª versão), que

$$u_j^i(x) = \int e^{i\langle x', \xi' \rangle} a_j^i(x'', \xi') d\xi', \quad \text{onde}$$

$$a_j^i \in S^{m+(n-2k)/4}(\mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k).$$

cq.d.

II.b) Propriedades :

Seja $I_\Sigma = \bigcup_{\mu \in \mathbb{R}} I_\Sigma^\mu$ (onde X é uma variedade de dimensão n ,

$\Sigma = \{x_1 = 0\}$ e I_Σ^μ é o espaço das distribuições de X conormais com respeito à Σ , de grau $\mu - n/4 + 1/2$)

Temos as seguintes propriedades :

Propriedade (II.b.1) : Se α é um escalar e $u \in I_\Sigma^\mu$, $\mu \in \mathbb{R}$, temos $\alpha u \in I_\Sigma^\mu$.

Propriedade (II.b.2) : Se $u_j \in I_\Sigma^{\mu_j}$, ($j = 1, 2$) e $\mu_1 \leq \mu_2$, então $u_1 + u_2 \in I_\Sigma^{\mu_2}$

Propriedade (II.b.3) : Se $u_j \in \overset{\circ}{I}_\Sigma^{\mu_j}$ (ver definição II.b.2), $\mu_j < -1$, $\mu_j \notin \mathbb{Z}$, com $j = 1, 2$ temos que $u_1 u_2 \in \overset{\circ}{I}_\Sigma^{\mu_1 + \mu_2 + 1}$.

Propriedade (II.b.4) : Se $u_1, \dots, u_r \in I_\Sigma^\mu$ com $\mu < -1$ e $f \in C^\infty$ temos que

$$f(x, u_1, \dots, u_r) \in I_\Sigma^\mu.$$

Propriedade (II.b.5) : $I_\Sigma^\mu = \overset{\circ}{I}_\Sigma^\mu + C^\infty$

Demonstração das propriedades :

Propriedade (II.b.1) : Trivial

Propriedade (II.b.2) : Decorre do seguinte fato :

$$\alpha_1(x', \xi_1) + \alpha_2(x', \xi_1) \in S^{\mu_2} \text{ (já que } \mu_1 \leq \mu_2 \text{), onde}$$

$$u_j(x) = \hat{a}_j^2(x', \cdot)(-x_1) \quad (j = 1, 2)$$

Propriedade (II.b.3) : Antes de provarmos este item veremos algumas definições e demonstraremos algumas proposições.

Para $\mu < -1$, definamos $k(\mu) \in \mathbb{N}$ por

$$(II.b.1) \quad -k(\mu) - 2 \leq \mu < -k(\mu) - 1.$$

Explicitamente, $k(\mu)$ é da forma $k(\mu) = -[\mu] - 2 = -[\mu + 2]$, $\mu < -1$.

Onde $[\mu]$ é o maior inteiro que é menor ou igual a μ , ou seja

$$[\mu] \leq \mu < [\mu] + 1.$$

Afirmacão II.b.1: Temos a seguinte relação

$$k(x) + k(y) + 1 \leq k(x+y) \leq k(x) + k(y) + 2 \quad \forall x, y < -1$$

$$\text{Dem: } 1) [x] + [y] \leq x + y < [x] + [y] + 2$$

$$2) [x + y] \leq x + y < [x + y] + 1$$

De 1) e 2) temos:

$$[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1.$$

Agora, como $k(\mu) = -[\mu] - 2$, $\mu < -1$, temos:

$$-k(x) - k(y) - 4 \leq -k(x+y) - 2 \leq -k(x) - k(y) - 3 \implies$$

$$\implies -k(x) - k(y) - 2 \leq -k(x+y) \leq -k(x) - k(y) - 1 \implies$$

$$\implies k(x) + k(y) + 1 \leq k(x+y) \leq k(x) + k(y) + 2$$

cqd

Para $u \in \mathcal{I}_{\Sigma}^{\mu}$, temos $u \in C^{k(\mu)}(X)$ e $(Lu)|_{\Sigma} \in C^{\infty}(\Sigma)$ para todo operador diferencial L de ordem $\leq k(\mu)$.

Definição II.b.2: Para $\mu < -1$, designamos $\mathcal{I}_{\Sigma}^{\mu}$ o ideal de $\mathcal{I}_{\Sigma}^{\mu}$ constituído pelas $u \in \mathcal{I}_{\Sigma}^{\mu}$ que se anulam de ordem $k(u)+1$ sobre Σ (ou seja, $Lu|_{\Sigma} = 0$ para todo operador diferencial L de ordem menor ou igual à $k(\mu)$, onde $k(\mu)$ é definido em (II.b.1).

Proposição II.b.1: Sejam $u \in \dot{\mathcal{I}}_{\Sigma}^{\mu}$ e $f \in C^{\infty}$ que se anula de ordem p sobre Σ . Então $fu \in \dot{\mathcal{I}}_{\Sigma}^{\mu-p}$.

Dem: Racionando em termos locais com u definida por

$$u(x) = \int e^{ix_1 \cdot \xi_1} a(x', \xi_1) d\xi_1 \quad \text{onde } x' = (x_2, \dots, x_n)$$

e onde $a \in S^{\mu}(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R})$

pondo $k(u) = k$, $(-k-2 \leq \mu < -k-1)$, denotando $v(x) = x_1^p u(x)$ e congelando x' , temos

$$\begin{aligned} v(x_1) &= x_1^p \int e^{ix_1 \cdot \xi_1} a(\xi_1) d\xi_1 = (-i)^p \int \partial_{\xi_1}^p e^{ix_1 \cdot \xi_1} a(\xi_1) d\xi_1 = \\ &= (i)^p \int e^{ix_1 \cdot \xi_1} \partial_{\xi_1}^p a(\xi_1) d\xi_1 \end{aligned}$$

e, portanto, $v \in \dot{\mathcal{I}}_{\Sigma}^{\mu-p}$.

Agora,

$$v^{(l)}(0) = cte \int \xi_1^l \partial_{\xi_1}^p a(\xi_1) d\xi_1, \quad 0 \leq l \leq k+p.$$

Por integração por partes, obtemos

$$v^{(l)}(0) = cte \int \partial_{\xi_1}^{p-l} a(\xi_1) d\xi_1 = 0 \quad \text{para } 0 \leq l < p \quad \text{e}$$

$$v^{(l)}(0) = cte \int \xi_1^{l-p} a(\xi_1) d\xi_1 = 0, \quad \text{para } p \leq l \leq k+p.$$

cqd

Proposição II.b.2: $\dot{\mathcal{I}}_{\Sigma}^{\mu}$ é o espaço das funções u da forma $u=fv$ onde $f \in C^{\infty}$ se anula de ordem $k(\mu)$ sobre Σ , e onde $v \in \dot{\mathcal{I}}_{\Sigma}^{\mu+k(\mu)}$.

Dem: Seja $A := \left\{ u : u = fv, f \in C^{\infty}, \partial^{\alpha} f|_{\Sigma} = 0 \text{ para todo } |\alpha| \leq k(\mu)-1 \text{ e } v \in \dot{\mathcal{I}}_{\Sigma}^{\mu+k(\mu)} \right\}$

Decorre da proposição II.b.1 que $A \subseteq \dot{\mathcal{I}}_{\Sigma}^{\mu}$

Agora, seja $u \in \bigcap_{\Sigma}^{\infty} \mu$ e $k(\mu) = k$.

A fórmula de Taylor nos dá

$$(II.b.2) \quad u(x_1) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{x_1^j}{j!} u^{(j)}(0) + x_1^k v(x_1) \quad \text{onde}$$

$$v(x_1) = k \int_0^1 (1-t)^{k-1} u^{(k)}(tx_1) dt, \quad v(0) = u^{(k)}(0) = 0$$

O somatório no segundo membro de (II.b.2) é igual a zero por hipótese.

Mostraremos que $v \in \bigcap_{\Sigma}^{\mu+k}$:

$$v(x_1) = k \int_0^1 (1-t)^{k-1} u^{(k)}(tx_1) dt =$$

$$= cte \int_0^1 (1-t)^{k-1} \left[\int_{\mathbb{R}} \xi_1^k e^{i\langle tx_1, \xi_1 \rangle} a(\xi_1) d\xi_1 \right] dt = \quad (1)$$

$$= cte \int_{\mathbb{R} \times (0,1)} (1-t)^{k-1} \xi_1^k e^{i\langle tx_1, \xi_1 \rangle} a(\xi_1) dt d\xi_1 = \quad (2)$$

$$= cte \int_0^1 \int_0^1 (1-t)^{k-1} (w_1/t)^k e^{i\langle w_1, x_1 \rangle} a(w_1/t) t^{-1} dt dw_1 =$$

$$= cte \int_{\mathbb{R}} e^{i\langle w_1, x_1 \rangle} b(w_1) dw_1 \quad \text{onde}$$

$$b(w_1) = \int_0^1 (1-t)^{k-1} (w_1/t)^k a(w_1/t) t^{-1} dt$$

(1) : Utilizando Fubini

(2) : Por uma mudança de variável, $w_1 = t\xi_1$

Fazendo $\Delta = t^{-1}$ temos:

$$b(w_1) = cte \int_1^{+\infty} (1-\Delta^{-1})^{k-1} w_1^k \Delta^{k-1} a(\Delta w_1) d\Delta$$

Então

$$v(x_1) = \int e^{i\langle w_1, x_1 \rangle} b(w_1) dw_1 \quad \text{onde}$$

$$b(\xi_1) = cte \int_1^{+\infty} (1-\Delta^{-1})^{k-1} \xi_1^k \Delta^{k-1} a(\Delta \xi_1) d\Delta$$

$$I(\xi_1) := (1-\Delta^{-1})^{k-1} \xi_1^k \Delta^{k-1} a(\Delta \xi_1)$$

$$\begin{aligned} \left[I(\xi_1) \right]^{(j)} &= (1-\Delta^{-1})^{k-1} \Delta^{k-1} \sum_{i \leq j} \binom{j}{i} (\xi_1^k)^{(j-i)} a^{(i)}(\Delta \xi_1) = \\ &= C(\Delta) \sum_{i \leq j} C_{ij} \xi_1^{k-j+i} a^{(i)}(\Delta \xi_1) \end{aligned}$$

Agora, para $|\xi_1| \gg 1$ temos :

$$\begin{aligned} |\xi_1|^{k-j+i} (1 + \Delta |\xi_1|)^{\mu-i} &\leq cte |\xi_1|^{k-j+i} \Delta^{\mu-i} |\xi_1|^{\mu-i} \leq \\ &\leq cte |\xi_1|^{k-j+\mu} \Delta^{\mu} \Delta^{-i} \leq cte |\xi_1|^{k-j+\mu} \Delta^{\mu}. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \left| \left[I(\xi_1) \right]^{(j)} \right| &\leq cte |\xi_1|^{k-j+\mu} \Delta^{\mu+k-1}, \quad b \in C^\infty, \text{ e} \\ |b^{(j)}(\xi_1)| &\leq cte |\xi_1|^{k+\mu-j} \int_1^{+\infty} \Delta^{k+\mu-1} d\Delta \end{aligned}$$

Portanto temos

$$|b^{(j)}(\xi_1)| \leq cte |\xi_1|^{k+\mu-j} \quad \text{para } |\xi| \gg 1$$

Para $|\xi| \leq R$ ($R > 0$), temos facilmente que

$$(1 + |\xi|)^{-(k+\mu-j)} |b^{(j)}(\xi)| \leq M, \quad \text{para algum } M > 0$$

Concluimos então que

$$v \in \overset{\circ}{\prod}_{\Sigma}^{\mu+k}.$$

Enfim, se $u \in \overset{\circ}{\prod}_{\Sigma}^{\mu}$, mostramos que $u = fv$ com $f \in C^\infty$ nula

de ordem k sobre Σ e $v \in \overset{\circ}{\prod}_{\Sigma}^{\mu+k}$.

cqd

Dem da propriedade II.b.3 :

Supondo demonstrado que $u_1 u_2 \in \overset{\circ}{\prod}_{\Sigma}^{\mu_1 + \mu_2 + 1}$, mostraremos

que $u_1 u_2 \in \overset{\circ}{\prod}_{\Sigma}^{\mu_1 + \mu_2 + 1}$.

$$\partial^{\alpha}(u_1 u_2) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha-\beta} u_1 \partial^{\beta} u_2$$

Se $|\beta| \leq k(\mu_2)$ não há nada a demonstrar pois $u_2 \in \overset{\circ}{\prod}_{\Sigma}^{\mu_2}$

Se $|\beta| > k(\mu_2)$: Para $|\alpha| \leq k(\mu_1 + \mu_2 + 1)$ temos

$$|\alpha| = k(\mu_1 + \mu_2) - 1 \leq k(\mu_1) + k(\mu_2) + 2 - 1 =$$

$$= k(\mu_1) + k(\mu_2) + 1, \text{ e portanto}$$

$$|\alpha - \beta| = |\alpha| - |\beta| < k(\mu_1) + k(\mu_2) + 1 - k(\mu_2) =$$

$$= k(\mu_1) + 1 \implies |\alpha - \beta| \leq k(\mu_1) \implies \partial^{\alpha-\beta} u_1|_{\Sigma} = 0 \implies$$

$$\implies \partial^{\alpha}(u_1 u_2)|_{\Sigma} = 0 \text{ para } |\alpha| \leq k(\mu_1 + \mu_2 + 1)$$

Logo

$$u_1 u_2 \in \overset{\circ}{\prod}_{\Sigma}^{\mu_1 + \mu_2 + 1}$$

Para demonstrarmos a propriedade II.b.3 podemos nos restringir ao caso em que $-2 \leq \mu_1, \mu_2 < -1$, pois :

Suponha que tenhamos provado

(II.b.3) $u_1 u_2 \in \overset{\circ}{\prod}_{\Sigma}^{\mu_1 + \mu_2 + 1}$ se $-2 \leq \mu_1, \mu_2 < -1$, e $u_j \in \overset{\circ}{\prod}_{\Sigma}^{\mu_j}$.

Sejam $v_j \in \overset{\circ}{\prod}_{\Sigma}^{\beta_j}$ ($j = 1, 2$), $-k(\beta_j) - 2 \leq \beta_j < -k(\beta_j) - 1$

Pela proposição II.b.2 temos

$$v_j = \tilde{f}_j \tilde{v}_j \text{ onde } \tilde{f}_j \in C^{\infty} \text{ se anula de ordem } k(\beta_j) \text{ sobre}$$

Σ , e $\tilde{v}_j \in \overset{\circ}{\prod}_{\Sigma}^{\beta_j + k(\beta_j)}$. Isto implica que

$$v_1 v_2 = \tilde{f}_1 \tilde{v}_1 \tilde{f}_2 \tilde{v}_2 = \tilde{f}_1 \tilde{f}_2 \tilde{v}_1 \tilde{v}_2$$

Como $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in C^{\infty}$ se anula de ordem $k(\beta_1) + k(\beta_2)$; e

$$\tilde{v}_1 \tilde{v}_2 \in \overset{\circ}{\prod}_{\Sigma}^{\beta_1 + \beta_2 + k(\beta_1) + k(\beta_2) + 1}$$

por (II.b.3), temos,

utilizando a proposição II.b.1, que $v_1 v_2 \in \overset{\circ}{\prod}_{\Sigma}^{\beta_1 + \beta_2 + 1}$.

Analisando ainda em termos locais , congelando x' , escrevamos $x_1 = x$ e $\xi_1 = \xi$. Denote $u = u_1 u_2$.

$$u_j = \hat{a}_j \quad \text{com } a_j \in S^{\mu_j} \quad (j = 1, 2)$$

$$u = \hat{a} \quad \text{com } a = a_1 * a_2$$

Como $u_j(0, x') = 0$ temos

$$\int a_1(\xi) d\xi = 0 = \int a_2(\xi) d\xi \quad \text{e portanto}$$

$$(II.b.4) \quad a(\xi) = \int \left[a_1(\xi - \eta) - a_1(\xi) \right] a_2(\eta) d\eta$$

Considere as seguintes regiões :

$$A_1 = \left\{ |\eta| \leq \alpha |\xi| \right\} \quad \text{com } 0 < \alpha < 1$$

$$A_2 = \left\{ |\eta| \geq \beta |\xi| \right\} \quad \text{com } \beta > 1$$

$$A_3 = \left\{ \alpha |\xi| \leq |\eta| \leq \beta |\xi| \right\}$$

1) Em A_1 :

Seja $0 \leq t \leq 1$

$$|\xi| = |\xi - t\eta + t\eta| \leq |\xi - t\eta| + |t\eta| \implies$$

$$|\xi - t\eta| \geq |\xi| - |t\eta| \geq |\xi| - \alpha |\xi| = \tilde{C} |\xi| \quad \text{onde}$$

$$\tilde{C} = (1 - \alpha) < 1.$$

Temos, então,

$$1 + |\xi - t\eta| \geq 1 + \tilde{C} |\xi| + (\tilde{C} - 1) = \tilde{C} (1 + |\xi|).$$

Agora,

$$|a_1(\xi - \eta) - a_1(\xi)| = |\eta| |a'_1(\xi - t\eta)| \implies$$

$$\implies |a_1(\xi - \eta) - a_1(\xi)| = |\eta| |a'_1(\xi - t\eta)|, \quad (0 \leq t \leq 1) \implies$$

$$|a_1(\xi - \eta) - a_1(\xi)| \leq |\eta| (1 + |\xi - t\eta|)^{\mu_1 - 1} \leq$$

$$\leq C |\eta| (1 + |\xi|)^{\mu_1 - 1} \quad \text{já que } \mu_1 - 1 < 0.$$

Então

$$|\alpha(\xi)| \leq C (1 + |\xi|)^{\mu_1 - 1} \int_{|\eta| \leq \alpha|\xi|} |\eta| |\alpha_2(\eta)| d\eta \leq$$

$$C' (1 + |\xi|)^{\mu_1 - 1} \int_{|\eta| \leq \alpha|\xi|} (1 + |\eta|)^{\mu_2 + 1} d\eta =$$

$$= C'' (1 + |\xi|)^{\mu_1 - 1} \left[(1 + |\eta|)^{\mu_2 + 2} \right]_0^{\alpha|\xi|} =$$

$$= C'' (1 + |\xi|)^{\mu_1 - 1} \left[(1 + \alpha|\xi|)^{\mu_2 + 2} - 1 \right] <$$

$$< C'' (1 + |\xi|)^{\mu_1 - 1} (1 + |\xi|)^{\mu_2 + 2} \longrightarrow$$

$$\implies |\alpha(\xi)| \leq C'' (1 + |\xi|)^{\mu_2 + \mu_1 + 1}$$

2) Em A_2' :

$$|\alpha_1(\xi - \eta)| \leq \tilde{C} (1 + |\xi - \eta|)^{\mu_1}$$

Agora,

$$|\eta - \xi| \geq |\eta| - |\xi| \geq |\eta| - |\eta|/\beta = |\eta|(1 - 1/\beta)$$

Fazendo $(1 - 1/\beta) = C'$, temos:

$$1 + |\eta - \xi| \geq 1 + C'|\eta|, \quad 0 < C' < 1$$

Portanto

$$1 + |\eta - \xi| \geq 1 + C'|\eta| + C' - 1 = C'(1 + |\eta|)$$

Logo

$$|\alpha_1(\xi - \eta)| \leq C (1 + |\eta|)^{\mu_1}$$

Como $|\eta| \geq \beta |\xi|$, $\beta > 1$ temos

$$|\eta| > |\xi| \longrightarrow 1 + |\eta| > 1 + |\xi| \longrightarrow (1 + |\eta|)^{\mu_1} < (1 + |\xi|)^{\mu_1}$$

Concluimos, então, que

$$|\alpha_1(\xi - \eta)| \leq C (1 + |\xi|)^{\mu_1}$$

E finalmente, como

$$|a_1(\xi)| \leq C(1 + |\xi|)^{\mu_1}, \text{ temos}$$

$$|a(\xi)| \leq C'(1 + |\xi|)^{\mu_1} \int_{|\eta| \geq \beta|\xi|} (1 + |\eta|)^{\mu_2} d\eta =$$

$$= C''(1 + |\xi|)^{\mu_1 + \mu_2 + 1}, \text{ supondo } \mu_2 < -1 \text{ na última}$$

igualdade.

3) Em A_3 :

Suponha, por exemplo, $\xi > 0$. Para $\eta > 0$ temos :

$$a) |a_1(\xi - \eta) - a_1(\xi)| = |\eta| |a'_1(\xi - t\eta)|, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$b) |a'_1(\xi - t\eta)| \leq C(1 + |\xi - t\eta|)^{\mu_1 - 1}$$

Porém $|\xi - t\eta| > |\xi|$ pois $-t\eta > 0$, e portanto,

$$|a'_1(\xi - t\eta)| \leq C(1 + |\xi|)^{\mu_1 - 1}.$$

Agora, raciocinando como em 1) temos a conclusão desejada.

Para $\eta > 0$, analisaremos $(1 - \varepsilon)\xi \leq \eta \leq (1 + \varepsilon)\xi$ com $0 < \varepsilon < 1$:

$$\int_{(1-\varepsilon)\xi \leq \eta \leq (1+\varepsilon)\xi} |a_1(\xi - \eta) - a_1(\xi)| |a_2(\eta)| d\eta \leq$$

$$\leq \int_{(1-\varepsilon)\xi \leq \eta \leq (1+\varepsilon)\xi} (|a_1(\xi - \eta)| + |a_1(\xi)|) |a_2(\eta)| d\eta$$

Agora,

$$\begin{aligned} |a_1(\xi)| \int_{(1-\varepsilon)\xi \leq \eta \leq (1+\varepsilon)\xi} |a_2(\eta)| d\eta &\leq C(1 + \xi)^{\mu_1} \left[\left(1 + (1 + \varepsilon)\xi\right)^{\mu_2 + 1} + \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + (1 - \varepsilon)\xi\right)^{\mu_2 + 1} \right] \leq C(1 + \varepsilon)^{\mu_1} \left(1 + (1 + \varepsilon)\xi\right)^{\mu_2 + 1} \leq \\ &\quad C(1 + \xi)^{\mu_1 + \mu_2 + 1}, \text{ supondo } \mu_2 + 1 < 0. \end{aligned}$$

Fazendo $z = \xi - \eta$, temos $-\varepsilon\xi \leq z \leq \varepsilon\xi$, ou seja, $|z| \leq \varepsilon\xi$

Ficamos com

$$\int_{(1-\varepsilon)\xi \leq \eta \leq (1+\varepsilon)\xi} a_1(\xi-\eta) a_2(\eta) d\eta = \int_{|z| \leq \varepsilon\xi} a_1(z) a_2(\xi-z) dz = J_3 + K_3$$

Antes de especificarmos J_3 e K_3 , faremos alguns cálculos

Seja $a_2(\xi-z) - a_2(\xi) =: \varphi(z)$

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi(z) = \int_0^z \varphi'(y) dy = - \int_0^z a_2'(\xi-y) dy = -z \int_0^1 a_2'(\xi - tz) dt$$

$$\text{Seja } S(\xi, z) = - \int_0^1 a_2'(\xi - tz) dt$$

$$|S(\xi, z)| \leq \int_0^1 |a_2'(\xi - tz)| dt$$

Como $|\xi - tz| \geq |\xi| - |t\xi| = \xi - t|z|$, e $\xi - t|z| \geq \xi - t^2\xi = \xi(1 - t^2)$ para $|z| \leq t\xi$ temos:

$$|S(\xi, z)| \leq C (1 + \xi)^{\mu_2 - 1} \text{ para } |z| \leq \varepsilon\xi; \text{ e}$$

$$a_2(\xi - z) = z S(\xi, z) + a_2(\xi).$$

Agora,

$$J_3 = \int_{|z| \leq \varepsilon\xi} a_1(z) a_2(\xi) dz \text{ e } K_3 = \int_{|z| \leq \varepsilon\xi} z a_1(z) S(\xi, z) dz$$

$$J_3 = \int_{|z| \leq \varepsilon\xi} a_1(z) a_2(\xi) dz - \int_{|z| \geq \varepsilon\xi} a_1(z) a_2(\xi) dz =$$

$$a_2(\xi) \int_{|z| \geq \varepsilon\xi} a_1(z) dz - \int_{|z| \geq \varepsilon\xi} a_1(z) a_2(\xi) dz = -a_2(\xi) \int_{|z| \geq \varepsilon\xi} a_1(z) dz$$

pois $\int a_1(z) dz = 0$.

Então temos que

$$|J_3| \leq C' (1 + \xi)^{\mu_2} \int_{|z| \geq \varepsilon \xi} (1 + |z|)^{\mu_1} dz$$

Supondo que $\mu_1 + 1 < 0$: $|J_3| \leq C'' (1 + \xi)^{\mu_1 + \mu_2 + 1}$

$$|K_3| \leq \int_{|z| \leq \varepsilon \xi} |z a_1(z) S(\xi, z)| dz \leq C' (1 + \xi)^{\mu_2 - 1} \int_{|z| \leq \varepsilon \xi} |z| |a_1(z)| dz$$

pois já vimos que $|S(\xi, z)| \leq C (1 + \xi)^{\mu_2 - 1}$.

E procedendo como em 1) obtemos que

$$|K_3| \leq C'' (1 + \xi)^{\mu_1 + \mu_2 + 1} \quad \text{com} \quad \mu_1 + 2 > 0$$

Obs: O caso $\xi > 0$: $\eta > 0$, $\eta < 0$ decorre analogamente

Assim mostramos que $|a(\xi)| \leq cte (1 + |\xi|)^{\mu_1 + \mu_2 + 1}$

Para provarmos que

$$|a^{(j)}(\xi)| \leq cte (1 + |\xi|)^{\mu_1 + \mu_2 + 1 - j} \quad \text{com}$$

$$a^{(j)}(\xi) = \int a_1(\xi - z) - a_2^{(j)}(z) dz, \quad \text{não podemos proceder}$$

como nos cálculos anteriores (com μ_2 substituído por $\mu_2 - j$) pois a hipótese de $(\mu_2 - j) + 2 \geq 0$ não é mais satisfeita.

É conveniente reescrever (II.b.4) assim :

$$a^{(j)}(\xi) = \int \left[a_1(\xi - \eta) - \sum_{l \leq j} a_1^{(l)}(\xi) (-\eta)^l / l! \right] a_2^{(j)}(\eta) d\eta.$$

$$\left[\int \eta^l a_2^{(j)}(\eta) d\eta = cte \int a_2^{(j-l)}(\eta) d\eta = cte \langle 1, a_2^{(j-l)}(\eta) \rangle = cte \langle 1', a_2^{(j-l-1)}(\eta) \rangle = 0 \text{ para } 0 \leq l \leq j \right]$$

Em A_1 teremos :

$$|a^{(j)}(\xi)| = \int_{|\eta| \leq \alpha |\xi|} \left| a_1(\xi - \eta) - \sum_{l \leq j} a_1^{(l)}(\xi) (-\eta)^l / l! \right| |a_2^{(j)}(\eta)| d\eta$$

Pelo desenvolvimento de Taylor temos,

$$a_1(\xi - \eta) = \sum_{l \leq j} a_1^{(l)}(\xi) (-\eta)^l / l! + r(\xi, \eta)$$

onde
$$r(\xi, \eta) = \left[\int_0^1 (1-t)^j / j! a_1^{(j+1)}(\xi - t\eta) dt \right] (-\eta)^{j+1}$$

$$|r(\xi, \eta)| \leq |\eta|^{j+1} \int_0^1 |a_1^{(j+1)}(\xi - t\eta)| dt \leq \\ \leq C |\eta|^{j+1} (1 + |\xi - t\eta|)^{\mu_1 - j - 1} \leq \tilde{C} |\eta|^{j+1} (1 + |\xi|)^{\mu_1 - j - 1}$$

Então

$$|a^{(j)}(\xi)| \leq C' (1 + |\xi|)^{\mu_1 - j - 1} \int_{|\eta| \leq \alpha |\xi|} |a_2^j(\eta)| |\eta|^{j+1} d\eta \leq \\ \leq C' (1 + |\xi|)^{\mu_1 - j - 1} \int_{|\eta| \leq \alpha |\xi|} (1 + |\eta|)^{\mu_2 + 1} d\eta \leq C'' (1 + |\xi|)^{\mu_1 - j + \mu_2 + 1}$$

com $\mu_2 + 2 > 0$

Em A_2 teremos :

$$|a^{(j)}(\xi)| = \int_{|\eta| \geq \beta |\xi|} |I_1(\xi, \eta)| d\eta - \int_{|\eta| \geq \beta |\xi|} |I_2(\xi, \eta)| d\eta \quad \text{onde}$$

$$I_1(\xi, \eta) = |a_1(\xi - \eta) a_2^{(j)}(\eta)| \quad \text{e}$$

$$I_2(\xi, \eta) = \sum_{l \leq j} \left[a_1^{(l)}(\xi) (-\eta)^l / l! \right] a_2^{(j)}(\eta)$$

$$|I_1(\xi, \eta)| \leq C (1 + |\xi - \eta|)^{\mu_1} (1 + |\eta|)^{\mu_2 - j} \leq \\ C' (1 + |\xi|)^{\mu_1} (1 + |\eta|)^{\mu_2 - j} \rightarrow$$

$$\int_{|\eta| \geq \beta |\xi|} |I_1(\xi, \eta)| d\eta \leq C' (1 + |\xi|)^{\mu_1} \int_{|\eta| \geq \beta |\xi|} (1 + |\eta|)^{\mu_2 - j} d\eta \leq$$

$$\leq C'' (1 + |\xi|)^{\mu_1} (1 + \alpha |\xi|)^{\mu_2 - j + 1} \leq$$

$$C'' (1 + |\xi|)^{\mu_1 + \mu_2 - j + 1} \quad \text{com } \mu_2 + 1 - j < 0$$

$$|I_2(\xi, \eta)| \leq |\alpha_2^{(j)}(\eta)| \sum_{l \leq j} |\alpha_1^{(l)}(\xi)| (-\eta)^l / l! \leq$$

$$\leq C (1 + |\xi|)^{\mu_1 - l} (1 + |\eta|)^{\mu_2 - j} |\eta|^l \leq$$

$$\leq C (1 + |\xi|)^{\mu_1 - l} (1 + |\eta|)^{\mu_2 - j + l}.$$

Portanto

$$\int_{|\eta| \geq \beta |\xi|} |I_2(\xi, \eta)| d\eta \leq C (1 + |\xi|)^{\mu_1 - l} \int_{|\eta| \geq \beta |\xi|} (1 + |\eta|)^{\mu_2 - j + l} d\eta \leq$$

$$C' (1 + |\xi|)^{\mu_1 + \mu_2 - j + 1} \quad \text{com } \mu_2 + 1 - j + 1 < 0 \quad \text{para}$$

$$0 \leq l \leq j.$$

Em A_3 , os termos $\alpha_1^{(l)}(\xi)(-\eta)^l / l!$ conduzem a majoração desejada procedendo como em 3).

$$\text{Assim } a \in S^{\mu_1 + \mu_2 + 1} \quad \text{e, portanto, } u \in \bigcap_{\Sigma} S^{\mu_1 + \mu_2 + 1}.$$

cqd

Agora iniciaremos a demonstração da Propriedade (II.b.4)

Provaremos para o caso $r = 1$.

Seja $u_1 = u$. Por simplicidade, consideraremos o caso "espaço de Sobolev" na definição de $\mathbb{I}^\mu$ e $n = 1$, isto é,

$$\mathbb{I}^\mu = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) ; \left[x \frac{d}{dx} \right]^k u \in H_{loc}^s(\mathbb{R}) \quad \forall s < -\mu - 1/2 \right\}$$

Em particular, podemos considerar apenas o caso em que $-\mu - 1/2 > 1 > 1/2$. Pela imersão de Sobolev temos que u é contínua. Daí segue que $f(x, u(x))$ define uma função contínua. De fato, é bem conhecido que pelo Lema de Schauder (Ver referência [5]) que $f(x, u(x)) \in H_{loc}^1(\mathbb{R}^1)$ sempre que $s > 1/2$. Logo é suficiente provar o caso

$$\left[x \frac{d}{dx} \right]^k f(x, u(x)) \in H_{loc}^s, \quad \text{quando } s > 1/2.$$

Dos argumentos que se seguem, verifica-se que é suficiente provar para $k = 1$. Empregaremos para este caso a densidade de C_0^∞ em H^1 . Claramente, podemos supor que u é de suporte compacto. Daí, tome uma sequência $\varphi_k(x) = k \varphi(kx)$, onde $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, com $\int \varphi = 1$. Logo,

$$x \frac{d}{dx} f(x, u * \varphi_k) = x f_x(x, u * \varphi_k) + x f_y(x, u * \varphi_k) \partial_x u * \varphi_k$$

O primeiro termo do lado direito desta igualdade converge, em $\mathcal{D}'$, para $x f_x(x, u(x)) \in H_{loc}^1(\mathbb{R})$. É também fácil ver que, $x \partial_x f(x, u * \varphi_k)$ converge, em $\mathcal{D}'$, para $x \partial_x f(x, u(x))$. Logo é suficiente mostrar que $x(\partial_x u * \varphi_k)$ converge, em H^1 , para uma função em H_{loc}^1 . Mas,

$$\begin{aligned} x(\varphi_k' * \partial_x u) &= x \int u(x-y) (\varphi_k')'(y) dy = \\ &= \int (x-y) u(x-y) (\varphi_k')'(y) dy + \int u(x-y) y (\varphi_k')'(y) dy = \\ &= \left[y u(y) * \varphi_k'(y) \right](x) + u * \psi_k \quad \text{pois} \\ y \varphi_k'(y) &= y k^2 \varphi'(ky) = k \psi(ky) = \psi_k(y) \end{aligned}$$

Daí

$$x \left[\varphi_k * \partial_x u \right] = u * \varphi_k(x) + \left[y u' * \varphi_k(y) \right](x) + u * \psi_k$$

onde o primeiro termo converge para u , o 2º para $x \frac{d}{dx} u$ e o 3º para $-u$.

Logo

$$x \left[\varphi_k * \partial_x u \right] \text{ converge para } x \frac{d}{dx} u \in H_{loc}^1(\mathbb{R})$$

q.q.d.

Demonstração da Propriedade (II.b.5) :

A inclusão $\dot{\mathbb{I}}_{\Sigma}^{\mu} + C^{\infty} \subseteq \mathbb{I}_{\Sigma}^{\mu}$ decorre do fato de uma função C^{∞} ser uma distribuição conormal e da propriedade (II.b.2).

Agora, sejam $u \in \mathbb{I}_{\Sigma}^{\mu}$, $P(x_1, x') = \sum_{j=0}^{k(\mu)} \partial_{x_1}^j u(0, x') x_1^j / j!$;

e $\tilde{u} = u - P$

$$\partial_x^{\alpha} \tilde{u} |_{\Sigma} = 0 \iff \partial_x^{\alpha} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \tilde{u} |_{\Sigma} = \partial_x^{\alpha} \left(\partial_{x_1}^{\alpha_1} \tilde{u} \right) |_{\Sigma} \equiv 0$$

para $|\alpha| \leq k(\mu)$ pois $\partial_{x_1}^j P(0, x') = \partial_{x_1}^j u(0, x') \quad \forall j \leq k(\mu)$

cqd

O objetivo deste capítulo é demonstrar o seguinte teorema :

Teorema III.1 : Seja $u \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_{\Sigma}^{\mu_0 + \varepsilon}$ solução da equação

$$(III.1) \quad f(x, u, \dots, \partial^\alpha u, \dots) = 0$$

onde a função $f(x, u, \dots, u^\alpha, \dots)$ $|\alpha| \leq m$ é C^∞ real..

Suponha que o operador linearizante P de f em u seja simplesmente característico com respeito à Σ .

Se u é conormal clássica do tipo H numa vizinhança de um ponto x_0 de Σ , então u é conormal clássica do tipo H numa vizinhança de toda curva bicaracterística γ de P traçada sobre Σ à partir de x_0 .

Observações :

I) Assumiremos que $\Sigma = \{x_1 = 0\}$

II) Aqui, dizer que P é simplesmente característico com respeito à Σ é dizer que ocorrem simultaneamente :

1) $\sigma_P(P)|_{N(\Sigma)} = 0$ onde $N(\Sigma) = \{(0, x', \xi_1, 0)\}$ é o feixe conormal de Σ .

2) $\nabla_{\xi} \sigma_P(P)(x_0, \xi_0) \neq 0 \quad \forall (x_0, \xi_0) \in N(\Sigma)$ onde $\sigma_P(P)$ é o símbolo principal de P .

III) Neste capítulo o espaço S^m terá o sentido da Definição I.2

Para $d \in \mathbb{C}$, denotemos QH o espaço das funções em $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \neq 0\}$ que são quase-homogêneas de grau d com respeito à x_1 , ou seja, são funções da forma

$$u(x) = |x_1|^d \Pi^\pm(x', \text{Log}|x_1|) \text{ para } \pm x_1 > 0$$

onde $\Pi^\pm$ é um polinômio em $\text{Log}|x_1|$ com coeficientes C^∞ em x' .

Se $\text{Re } d > 0$, a transformada de Fourier parcial com respeito à ξ_1 de uma tal função u (considerada como função de $\mathbb{R}^n$) é quase-homogênea de grau $-1-d$ com respeito à ξ_1 , portanto

$$QH^d \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} I_{\Sigma}^{-1-\text{Re } d} \quad \text{onde } \Sigma = \{x_1 = 0\}$$

Reciprocamente, se um símbolo $a(x', \xi_1)$ coincide para $|\xi_1| \gg 1$ com uma função de QH^h ($h \in \mathbb{C}$, $\text{Re } h < -1$) então a função u definida por

$$(III.2) \quad u(x) = \int e^{ix_1 \cdot \xi_1} a(x', \xi_1) d\xi_1$$

onde $x' = (x_2, \dots, x_n)$ e $a \in S^{\mu}(\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R})$ é um símbolo de grau μ com variável de frequência $\xi_1 \in \mathbb{R}$, está em QH^d módulo C^{∞} , onde $d = -1-h$.

É evidente que se $u_j \in QH^{d_j}$ ($j = 1, 2$), então $u_1 u_2 \in QH^{d_1 + d_2}$.

Seja $X \subseteq \mathbb{R}^n$, aberto. Considere a equação de ordem m em

$$(III.1): \quad f(x, u, \dots, \partial^{\alpha} u, \dots) \Big|_{|\alpha| \leq m} = 0$$

onde a função $f(x, u, \dots, u^{\alpha}, \dots) \Big|_{|\alpha| \leq m}$ é C^{∞} real.

Para $u \in C^m(X, \mathbb{R})$ denotamos $F(x, U)$ o primeiro membro de (III.1) e consideremos o operador P linearizante de F em u :

$$P = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\partial f(x, u, \dots)}{\partial u^{\alpha}} \partial^{\alpha}$$

Seja H uma família de graus tal que são satisfeitas:

$$i) H \subset \{h \in \mathbb{C} : \text{Re } h < -m-2\}$$

$$(III.3) \quad ii) H - \mathbb{N} \subset H$$

$$iii) H + H + m + 2 \subset H$$

iv) Para todo M real, o conjunto $\{h \in H : \text{Re } h > M\}$ é finito.

Será cômodo ordenarmos o conjunto $\text{Re } H$ numa sequência $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$, com (μ_j) estritamente decrescente e tendendo para $-\infty$. Consideraremos, ainda, que a sequência $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}}$ terá passo constante.

Proposição III.1 (Linearização) : Para $j = 1, \dots, r$,
sejam u_j da forma $u_j = \varphi_j + v_j + w_j$ com $\varphi_j \in C^\infty$, $v_j \in \dot{I}_\Sigma^\mu$,
 $w_j \in \dot{I}_\Sigma^\nu$, todas reais, e $\nu \leq \mu < -1$.

Seja uma função C^∞ real $f(x, U_1, \dots, U_r)$. Então

$$f(x, u_1, \dots, u_r) \equiv f(x, \varphi_1 + v_1, \dots, \varphi_r + v_r) + \\ + \sum_{j=1}^r \frac{\partial f}{\partial U_j}(x, \varphi_1, \dots, \varphi_r) w_j \text{ módulo } \dot{I}_\Sigma^{\mu+\nu+1} \text{ se } \mu, \nu \in \mathbb{Z}.$$

Dem : A fórmula de Taylor permite escrever

$$f(x, u_1, \dots, u_r) = f(x, \varphi_1 + v_1, \dots, \varphi_r + v_r) + \\ + \sum_{j=1}^r \frac{\partial f}{\partial U_j}(x, \varphi_1 + v_1, \dots) w_j + \sum_{j,l=1}^r w_{j,l} S_{j,l}(x, \varphi_1 + v_1, \dots, w_1, \dots)$$

onde as funções $S_{j,l} \in C^\infty$.

Como $\varphi_j + v_j \in \dot{I}_\Sigma^\mu$ (pois $\varphi_j \in C^\infty$ e $v_j \in \dot{I}_\Sigma^\mu$), $w_1 \in \dot{I}_\Sigma^\nu \subset \dot{I}_\Sigma^\mu$
e $S_{j,l} \in C^\infty$ temos, pela propriedade (II.b.4), que

$$S_{j,l}(x, \varphi + v, \dots, w, \dots) \in \dot{I}_\Sigma^\mu;$$

Portanto o seu produto por w_l está em $\dot{I}_\Sigma^\mu$ porque $w_l \in \dot{I}_\Sigma^\nu$ e $\dot{I}_\Sigma^\nu \subset \dot{I}_\Sigma^\mu$.

A propriedade II.b.3 nos dá que

$$w_{j,l} S_{j,l}(x, \varphi_1 + v_1, \dots, w_1, \dots) \in \dot{I}_\Sigma^{\mu+\nu+1} \text{ o que implica que}$$

$$\sum_{j,l=1}^r w_{j,l} S_{j,l}(x, \varphi_1 + v_1, \dots, w_1, \dots) \in \dot{I}_\Sigma^{\mu+\nu+1}.$$

Por outro lado, a mesma decomposição aplicada com f substituído por $\frac{\partial f}{\partial U_j}$, v_j por 0, w_j por v_j e com $\nu = \mu$, mostra que

$$\frac{\partial f}{\partial u_j}(x, \varphi_1 + v_1, \dots) \equiv \frac{\partial f}{\partial u_j}(x, \varphi_1, \dots) + \sum_l \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_l}(x, \varphi_1, \dots) v_l$$

módulo $\dot{\mathbb{I}}_{\Sigma}^{2\mu+1}$.

Como

$$\sum_l \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_l}(x, \varphi_1, \dots) \in C^\infty \text{ e } v_l \in \dot{\mathbb{I}}_{\Sigma}^{\mu}$$

Temos que

$$\sum_l \frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_l}(x, \varphi_1, \dots) v_l \in \dot{\mathbb{I}}_{\Sigma}^{\mu}$$

E como $2\mu + 1 < \mu$ temos, portanto, que

$$\dot{\mathbb{I}}_{\Sigma}^{2\mu+1} \subset \dot{\mathbb{I}}_{\Sigma}^{\mu} \quad \text{e assim}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_j}(x, \varphi_1 + v_1, \dots) \equiv \frac{\partial f}{\partial u_j}(x, \varphi_1, \dots) \text{ módulo } \dot{\mathbb{I}}_{\Sigma}^{\mu}.$$

A propriedade (II.b.3) nos dá finalmente que

$$\frac{\partial f}{\partial u_j}(x, \varphi_1 + v_1, \dots) w_j = \frac{\partial f}{\partial u_j}(x, \varphi_1, \dots) w_j \text{ módulo } \dot{\mathbb{I}}_{\Sigma}^{\mu+\nu+1}.$$

cqd

Proposição III.2: Seja $u \in \dot{\mathbb{I}}_{\Sigma}^{\mu}$ real. Suponha que o operador linearizante P seja característico com respeito à Σ .

Se $u = \varphi + \sum_{j=0}^l u_j$ com $\varphi \in C^\infty$, $u_j \in \dot{\mathbb{I}}_{\Sigma}^{\mu_j}$ (ver definição II.b.1)

todos reais, então

$$F(x, u) - F(x, \varphi + \sum_{j=0}^{l-1} u_j) \in \dot{\mathbb{I}}_{\Sigma}^{m-1+\mu_l}$$

e seu símbolo principal é $(i^{-1} \mathcal{L}_{H_p} + C) \sigma_l$, onde p é o símbolo principal de P , C o subprincipal de P , $\mathcal{L}_{H_p}$ a derivada de Lie do campo hamiltoniano H_p de p e σ_l é o símbolo principal de u_l .

(Suponha que $\mu_0, \mu_l \in \mathbb{Z}$)

Dem : Primeiramente quero mostrar que

$$F(x, u) - F\left(x, \varphi + \sum_{j=0}^{l-1} u_j\right) - Qu_l \in \overset{\circ}{\mathbb{I}} \mu_0 + 2m + \mu_l + 1 \text{ onde}$$

$$Q = \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{\partial f}{\partial u_\alpha}(x, \varphi, \dots, \partial^\alpha \varphi, \dots) \partial^\alpha$$

$$F(x, u) - F\left(x, \varphi + \sum_{j=0}^{l-1} u_j\right) - Qu_l = f(x, u, \dots, \partial^\alpha u, \dots)_{|\alpha| \leq m} +$$

$$- f\left(x, \varphi + \sum_{j=0}^{l-1} u_j, \dots, \partial^\alpha \left(\varphi + \sum_{j=0}^{l-1} u_j\right), \dots\right)_{|\alpha| \leq m} - Qu_l$$

Como $u = \varphi + \sum_{j=0}^{l-1} u_j + u_l$ temos que

$$\partial^\alpha u = \partial^\alpha \varphi + \partial^\alpha \left(\sum_{j=0}^{l-1} u_j \right) + \partial^\alpha u_l \text{ onde } |\alpha| \leq m$$

Definindo: $v_\alpha = \partial^\alpha \left(\sum_{j=0}^{l-1} u_j \right)$, $w_\alpha = \partial^\alpha u_l$, $\varphi_\alpha = \partial^\alpha \varphi$ temos

$$v_\alpha \in \overset{\circ}{\mathbb{I}} \mu_0 + m \text{ pois } u_j \in \overset{\circ}{\mathbb{I}} \mu_j \leq \overset{\circ}{\mathbb{I}} \mu_0 \text{ (} \mu_j \leq \mu_0 \text{) } \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \sum_{j=0}^{l-1} u_j \in \overset{\circ}{\mathbb{I}} \mu_0 \longrightarrow \partial^\alpha \left(\sum_{j=0}^{l-1} u_j \right) \in \overset{\circ}{\mathbb{I}} \mu_0 + m$$

Temos também $w_\alpha \in \overset{\circ}{\mathbb{I}} \mu_l + m$.

Como $\mu_0, \mu_l \notin \mathbb{Z}$ e $\mu_l < \mu_0 < -1$, usando a proposição III.1 temos

$$F(x, u) - F\left(x, \varphi + \sum_{j=0}^{l-1} u_j\right) - Qu_l \in \overset{\circ}{\mathbb{I}} \mu_0 + 2m + \mu_l + 1$$

Agora, como $u - \varphi \in \overset{\circ}{\mathbb{I}} \mu_0$ com $\mu_0 < -m-2$ temos $u - \varphi$ se anula de ordem $m+2$ sobre Σ , pois

$$-k(\mu_0) - 2 \leq \mu_0 \leq -k(\mu_0) - 1 \implies -k(\mu_0) - 2 \leq \mu_0 < -m - 2$$

$$\implies -k(\mu_0) < -m \implies k(\mu_0) > m \implies k(\mu_0) \geq m + 1 \implies$$

$$k(\mu_0) + 1 \geq m + 2.$$

$$\left. \begin{array}{l} u - \varphi \equiv 0 \text{ sobre } \Sigma \text{ de ordem } k(\mu_0) + 1 \\ e \\ k(\mu_0) + 1 \geq m + 2 \end{array} \right\} \rightarrow u - \varphi \equiv 0$$

sobre Σ de ordem $m + 2$.

Seja $\alpha_\beta = \frac{\partial f}{\partial u_\beta} (x, \varphi, \dots, \partial^\alpha \varphi, \dots) \mid_{|\alpha| \leq m}$ e

$$b_\beta = \frac{\partial f}{\partial u_\beta} (x, u, \dots, \partial^\alpha u, \dots) \mid_{|\alpha| \leq m}$$

UFPR-CCP
MEJ
Biblioteca

Afirmacão III.1 : $\alpha_\beta \equiv b_\beta$ em Σ de ordem 2.

Dem : Temos :

$$\begin{aligned} \partial_{x_j} \alpha_\beta &= \left[\partial_{x_j} \partial_{u_\beta} f \right] \left[x, \varphi, \dots, \partial^\alpha \varphi, \dots \right] + \\ &+ \sum_{|\gamma| \leq m} \left[\partial_{u_\gamma} \partial_{u_\beta} f \right] \left[x, \varphi, \dots, \partial^\alpha \varphi, \dots \right] \partial_{x_j} \partial^\gamma \varphi = \\ &\left[\partial_{x_j} \partial_{u_\beta} f \right] \left[x, u, \dots, \partial^\alpha u, \dots \right] + \\ &+ \sum_{|\gamma| \leq m} \left[\partial_{u_\gamma} \partial_{u_\beta} f \right] \left[x, u, \dots, \partial^\alpha u, \dots \right] \partial_{x_j} \partial^\gamma u = \partial_{x_j} b_\beta \text{ sobre } \end{aligned}$$

Σ . Temos que a penúltima igualdade se dá porque $u \equiv \varphi$ sobre Σ de ordem $m + 2$.

Vimos então que os coeficientes correspondentes dos operadores P e Q são iguais de ordem 2 sobre Σ .

cqd

Afirmacão III.2 : $\sigma_P^{(P)} \mid_{N(\Sigma)} = 0$ e $\alpha_\beta = b_\beta$ sobre Σ de

ordem 2 $\rightarrow \sigma_P^{(Q)} \mid_{N(\Sigma)} = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Dem : } \sigma_P^{(Q)} \Big|_{N(\Sigma)} &= \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha \xi^\alpha \Big|_{N(\Sigma)} = a_{(m,0,\dots,0)}^{(0,x')} \xi_1^m = \\ &= b_{(m,0,\dots,0)}^{(0,x')} \xi_1^m = \sum_{|\alpha|=m} b_\alpha \xi^\alpha \Big|_{N(\Sigma)} = \sigma_P^{(P)} \Big|_{N(\Sigma)} = 0. \end{aligned}$$

A terceira igualdade se dá porque $a_\beta = b_\beta$ sobre Σ de ordem 2.

A afirmação III.2 nos diz que Q é característico com respeito à Σ .

Agora mostraremos que $Qu_l \in \mathbb{I}_{\Sigma}^{m-1+\mu_l}$:

Como Q é característico com respeito à Σ temos:

$$Q = x_1 a'(x) D_{x_1}^m + \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha_1 < m}} \tilde{a}_\alpha(x) D_x^\alpha + \sum_{|\alpha| \leq m-1} \tilde{a}_\alpha(x) D_x^\alpha \text{ onde } \tilde{a}_\alpha, a' \in C^\infty$$

para $|\alpha| \leq m$, pois Q ser característico com respeito à $\Sigma \implies$

$$\implies a_{(m,0,\dots,0)}^{(0,x')} \xi_1^m = 0 \implies a_{(m,0,\dots,0)}^{(0,x')} = 0 \implies$$

$$a_{(m,0,\dots,0)} = x_1 a'(x).$$

O espaço dos vetores tangentes à Σ é gerado por $x_1 \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_n}$. Utilizando que $u_l \in \mathbb{I}_{\Sigma}^{\mu_l}$, temos

$$a'(x) x_1 \partial_{x_1} \partial_{x_1}^{m-1} u_l \in \mathbb{I}_{\Sigma}^{\mu_l+m-1} \text{ pois } \partial_{x_1}^{m-1} u_l \in \mathbb{I}_{\Sigma}^{\mu_l+m-1} \text{ e } x_1 \partial_{x_1} \text{ é tangente à } \Sigma.$$

$$\text{Como } \partial_x^\alpha u_l \in \mathbb{I}_{\Sigma}^{\mu_l+\alpha_1}, \text{ temos } \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ \alpha_1 < m}} \tilde{a}_\alpha(x) D_x^\alpha u_l \in \mathbb{I}_{\Sigma}^{\mu_l+m-1}$$

$$\text{e } \sum_{|\alpha| \leq m-1} \tilde{a}_\alpha(x) D_x^\alpha u_l \in \mathbb{I}_{\Sigma}^{\mu_l+m-1}$$

Portanto

$$Qu_l \in \mathbb{I}_{\Sigma}^{\mu_l+m-1}.$$

cqd

Afirmacão III.3 : $Qu_l \in \dot{\bigcap}_{\Sigma}^{m-1+\mu_l}$

Dem : $Qu_l = Q_m(u_l) + Q_{m-1}(u_l)$

Como $u_l \in \dot{\bigcap}_{\Sigma}^{\mu_l}$, temos $\partial^\alpha u_l \in \dot{\bigcap}_{\Sigma}^{\mu_l+m-1}$ se $|\alpha| \leq m-1$

o que implica que $Q_{m-1}(u_l) \in \dot{\bigcap}_{\Sigma}^{\mu_l+m-1}$.

Agora, $Q_m = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$. Como $D^\alpha u_l \in \dot{\bigcap}_{\Sigma}^{\mu_l+m}$, $|\alpha|=m$ e $a_\alpha|_{\Sigma} = 0$

pois Q é característico com respeito à Σ , temos, usando a

a proposição II.b.1, que $a_\alpha(x) D^\alpha u_l \in \dot{\bigcap}_{\Sigma}^{\mu_l+m-1}$ o que implica que

$Q_m(u_l) \in \dot{\bigcap}_{\Sigma}^{\mu_l+m-1}$ concluindo então que $Q(u_l) \in \dot{\bigcap}_{\Sigma}^{\mu_l+m-1}$.

cqd

Como $\dot{\bigcap}_{\Sigma}^{\mu_l+2m+\mu_l+1} \subset \dot{\bigcap}_{\Sigma}^{m-1+\mu_l}$, pois $\mu_l < -m-2$ e $\dot{\bigcap}_{\Sigma}^{\mu_l} \subset \dot{\bigcap}_{\Sigma}^{\eta}$

se $\mu \leq \eta$; temos que $F(x, u) - F(x, \varphi + \sum_{j=0}^{l-1} u_j) \in \dot{\bigcap}_{\Sigma}^{m-1+\mu_l}$,

concluindo a prova do teorema.

Decorre do teorema 18.2.12, (Ver referência [3]) que o símbolo principal de Qu_l é dado por $(i^{-1} \mathcal{L}_{H_p} + C) \sigma_l$ onde σ_l é o símbolo principal de u_l , p é o símbolo principal de P , C é o símbolo subprincipal, $\mathcal{L}_{H_p}$ a derivada de Lie do campo hamiltoniano H_p de p . A prova deste teorema decorre do cálculo dos operadores pseudo-diferenciais.

Observações :

III) Seja $Q = \sum_{|\alpha| \leq m} q_\alpha(x) \partial^\alpha$. É útil escrevermos a expressão

do símbolo principal de Q_{x_1} em coordenadas locais $x = (x_1, x')$, onde Q é característico com respeito à Σ .

$$u_1(x) = \int e^{ix_1 \cdot \xi_1} a_1(x', \xi_1) d\xi_1,$$

e $a_1 \in S^{\mu_1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

Vimos que podemos escrever Q da seguinte forma :

$$Q = x_1 q'(x) \partial_{x_1}^m + \sum_{\substack{|\alpha| = m \\ \alpha_1 < m}} \tilde{q}_\alpha(x) \partial_x^\alpha + \sum_{|\alpha| \leq m-1} \tilde{a}_\alpha(x) \partial_x^\alpha$$

Logo,

$$Q = x_1 q'(x) \partial_{x_1}^m + \sum_{j=2}^n A_j(x) \partial_{x_1}^{m-1} \partial_{x_j} + B(x) \partial_{x_1}^{m-1} + \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \alpha_1 < m-1}} \tilde{q}_\alpha(x) \partial_x^\alpha.$$

Se $|\alpha| \leq m$ e $\alpha_1 < m-1$ temos

$$\partial_x^\alpha u_1(x) = \int \partial_x^\alpha \left[e^{ix_1 \cdot \xi_1} a_1(x', \xi_1) \right] d\xi_1 =$$

$$\int (i\xi_1)^{\alpha_1} \partial_{x_1}^{\alpha_1} e^{ix_1 \cdot \xi_1} \partial_{x'}^{\alpha'} a_1(x', \xi_1) d\xi_1 \quad \text{onde}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha')$$

Agora,

$$\partial_{x'}^{\alpha'} a_1 \in S^{\mu_1} \quad \text{e} \quad \xi_1^{\alpha_1} \in S^{\alpha_1} \longrightarrow \partial_{x'}^{\alpha'} a_1 \xi_1^{\alpha_1} \in S^{\mu_1 + \alpha_1}.$$

Como $\alpha_1 \leq m-2$ temos

$$\begin{aligned} S^{\mu_l + \alpha_1} &\subseteq S^{\mu_l + m-2} \longrightarrow \partial_{x'}^{\alpha'} a_l \xi_1^{\alpha_1} \in S^{\mu_l + m-2} \longrightarrow \\ &\longrightarrow \partial_x^\alpha u_l \in I_{\Sigma}^{\mu_l + m-2} \longrightarrow \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ \alpha_1 < m-1}} q_\alpha(x) \partial_x^\alpha u_l(x) \in I_{\Sigma}^{\mu_l + m-2} \end{aligned}$$

De fato podemos assumir que $\{x_1 = cte\}$ é característico para Q. Obtemos, portanto,

$$Qu_l(x) = \int e^{ix_1 \cdot \xi_1} b_l(x', \xi_1) d\xi_1 \text{ módulo } I_{\Sigma}^{\mu_l + m-2},$$

$$(III.4) \quad b_l = (i\xi_1)^{m-1} \left[\sum_{j=2}^n A_j(0, x') \partial_{x_j} + B(0, x') \right] a_l.$$

IV) Q é simplesmente característico com respeito à Σ se ocorre simultaneamente :

$$1) \quad \sigma_P(Q) \Big|_{N(\Sigma)} = 0 \quad (Q \text{ é característico})$$

$$2) \quad \nabla_{(x, \xi)} \sigma_P(Q)(x_0, \xi_0) \neq 0 \quad \forall (x_0, \xi_0) \in N(\Sigma)$$

No teorema III.1 consideramos o operador P ser simplesmente característico com respeito à Σ no sentido da observação II porque se tivéssemos

$$\nabla_{(x, \xi)} \sigma_P(P)(x_0, \xi_0) \neq 0 \quad \forall (x_0, \xi_0) \in N(\Sigma)$$

a projeção em x da curva integral de H_p (campo hamiltoniano de p) poderia ser um ponto. Para evitar tal situação, a condição $\nabla_{\xi} \sigma_P(P)(x_0, \xi_0) \neq 0$ é suficiente ; é uma condição de não degenerescência das curvas bicaracterísticas.

Definição III.1 : Seja H uma família de graus verificando as condições (III.3). Dizemos que uma distribuição u em X é conormal clássica do tipo H com respeito à hipersuperfície Σ se u é C^∞ em $X \setminus \Sigma$ e se, numa vizinhança de cada ponto de Σ , por coordenadas locais tais que $\Sigma = \{x_1 = 0\}$, u admite um desenvolvimento assintótico $u \sim \sum_{h \in H} u_h$, com u_h quase-homogênea de grau $-1-h$ com respeito à x_1 .

Denotamos o espaço dessas distribuições de I_Σ^H .

O desenvolvimento assintótico precedente significa, por exemplo, que para todo inteiro positivo N , a função

$$u - \sum_{\text{Re } h \geq -N-1} u_h \in C^N.$$

Lema III. 1 : Seja $\mu \in \mathbb{R}$ e os símbolos $a_j(x', \xi_1) \in \text{QH}^{h_j}$ (em relação à ξ_1), $j = 1, \dots, N$, $h_j \in \mathbb{C}$ dois a dois distintos e $\text{Re } h_j = \mu$; onde temos $a(x', \xi_1) = \sum_{j=1}^N a_j(x', \xi_1)$.

Se $a \in S^{\mu'}$ para $|\xi_1|$ grande com $\mu' < \mu$, então $a_j = 0$ para $1 \leq j \leq N$.

Dem : Considere o caso $N = 2$

Seja $a = a_1 + a_2$ onde

$$a_1 = |\xi_1|^h \sum_{j=1}^{m_1} a_{j,1}^+(x') (\text{Log } |\xi_1|)^j \quad e$$

$$a_2 = |\xi_1|^h \sum_{j=1}^{m_2} a_{j,2}^+(x') (\text{Log } |\xi_1|)^j$$

Obs: $a_{j,k}^+(x') = \begin{cases} a_{j,k}^+(x') & \text{se } \xi_1 > 0 \\ \text{ou} \\ a_{j,k}^-(x') & \text{se } \xi_1 < 0 \end{cases} \quad k = 1, 2$

Seja

$$I_{1,2}(x', \xi_1) = \sum_{j=1}^{m_1} a_{j,1}^+(x') |\xi_1|^{i\sigma_1} (\text{Log} |\xi_1|)^j + \\ + \sum_{j=1}^{m_2} a_{j,2}^+(x') |\xi_1|^{i\sigma_2} (\text{Log} |\xi_1|)^j \quad \text{onde}$$

$$\sigma_j = \text{Im } h_j \quad (j = 1, 2)$$

Considere $m_1 > m_2$. Por hipótese, $\exists C > 0$ tal que

$$|\xi_1|^{-\mu'} |a(x', \xi_1)| < C \quad \text{quando } |\xi_1| \gg 1$$

Então temos

$$|\xi_1|^{\mu-\mu'} |I_{1,2}(x', \xi_1)| < C$$

Podemos supor que $a_{m_1,1}^+(x') \neq 0$. Portanto, $\exists x'$ tal que

$a_{m_1,1}^+(x') \neq 0$. Fixe este x' .

Temos

$$I_{1,2}(x', \xi_1) \sim (\text{Log} |\xi_1|)^{m_1} \quad \text{quando } |\xi_1| \gg 1$$

Portanto

$$|\xi_1|^{\mu-\mu'} (\text{Log} |\xi_1|)^{m_1} < \tilde{C} \quad \text{quando } |\xi_1| \gg 1, \text{ o que}$$

é uma contradição.

O caso $m_1 < m_2$ segue de forma análoga.

Agora, se $m_1 = m_2 = m$ temos que $\exists x'$ tal que

$$a_{m,1}^+(x') \neq 0 \quad \text{e} \quad a_{m,2}^+(x') \neq 0 \quad \text{ou}$$

$$a_{m,1}^-(x') \neq 0 \quad \text{e} \quad a_{m,2}^-(x') \neq 0$$

Suponha que $a_{m,1}^+(x') \neq 0$ e $a_{m,2}^+(x') \neq 0$. Seja $t \geq 1$,

$$\xi_1 = e^t$$

Temos

$$I_{1,2}(x', e^t) = \sum_{j=1}^m \left(a_{j,1}^+(x') e^{i\sigma_1 t} + a_{j,2}^+(x') e^{i\sigma_2 t} \right) t^j$$

Observe o termo

$$A_{m,1,2}(x', t) = \left(a_{m,1}^+(x') e^{i\sigma_1 t} + a_{m,2}^+(x') e^{i\sigma_2 t} \right) t^m$$

Se $A_{m,1,2}(x', t) = 0$ temos, pela independência linear das exponenciais, com $\sigma_1 \neq \sigma_2$, que $a_{m,1}^+(x') = a_{m,2}^+(x') = 0$, o que contradiz a hipótese de que $a_{m,1}^+(x') \neq 0$.

Se $A_{m,1,2}(x', t) \neq 0$, temos uma contradição, utilizando que a soma finita de senos e cossenos não decresce a ponto de "compensar" o crescimento da potência t^m , e também usando a hipótese de que $\alpha \in S^{\mu'}$ para $|\xi_1| \gg 1$ e $\mu' < \mu$.

A prova para o caso de $N \in \mathbb{N}$ qualquer ocorre de forma análoga.

cqd

Demonstração do teorema III.1 :

Seja $\Delta := \left\{ x \in \gamma : u \in \prod_{\Sigma}^H \text{ numa vizinhança de } x \right\}$

Agora, Δ é aberto, por definição; Δ é não vazio pois $x_0 \in \Delta$. Se provarmos que Δ é fechado teremos, como γ é conexa, que $\Delta = \gamma$.

Seja $\bar{x}$ um ponto aderente de Δ . Temos também, por hipótese, que $u \in C^\infty(X \setminus \Sigma)$.

Devemos mostrar que, numa vizinhança de $\bar{x}$, em coordenadas locais tais que $\Sigma = \{x_1 = 0\}$, u admite um desenvolvimento assintótico $u \sim \sum_{h \in H} u_h$ com u_h quasi-homogênea de grau $-1-h$ com respeito à x_1 .

Como P é simplesmente característico com respeito à Σ , os coeficientes $A_j(0, \bar{x}')$ de (III.4) não são todos nulos, temos pelo teorema do fluxo tubular, que existe uma mudança de coordenadas tal que numa vizinhança de $\bar{x}$

$$(i)^{-1} \mathcal{L}_{H_P} + C = D^{-1}(x') \xi_1^{m-1} \frac{\partial}{\partial x_2} D(x')$$

sobre $N(\Sigma)$, $\Sigma = \{x_1 = 0\}$, $\bar{x} = (0, \bar{x}_2, 0)$, $\bar{x}_2 > 0$, onde a função D é C^∞ e não se anula, com u definida, por hipótese, por um símbolo clássico do tipo H se $x_2 < 0$. Encontraremos funções $u_h \in QH^{-1-h}$ (para todo x_2) tais que $u \sim \sum_{h \in H} u_h$.

Seja $l \in \mathbb{N}$. Suponhamos encontradas $u_h \in QH^{-1-h}$ (para todo x_2) quando $h \in H$, $\operatorname{Re} h \geq \mu_{l-1}$ com

$$(III.4) \quad u = \varphi + \sum_{\operatorname{Re} h \geq \mu_{l-1}} u_h + v \quad ; \quad \varphi \in C^\infty, \quad v \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcup_{\Sigma} \mu_l + \varepsilon$$

φ e v reais (com a convenção que, para $l = 0$, não existe funções u_h).

$$\text{Seja } F_l = F \left[x, \varphi + \sum_{\operatorname{Re} h \geq \mu_{l-1}} u_h \right], \text{ onde}$$

$$F(x, u) = f(x, u, \dots, \partial^\alpha u, \dots) \quad |\alpha| \leq m$$

A fórmula de Taylor mostra que F_l admite um desenvolvimento assintótico $F_l \sim \sum_{h \in H} v_h$, $v_h \in QH^{-1-h-m}$. Por outro lado

$$\text{seja } w_j = \sum_{\operatorname{Re} h = \mu_j} u_h, \quad 0 \leq j \leq l-1 \quad \text{e} \quad w_l = v$$

Como $F(x, u) = f(x, u, \dots, \partial^\alpha u, \dots)_{|\alpha| \leq m}$, temos $F(x, u) = 0$ com $u \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \dot{I}_{\Sigma}^{\mu_0 + \varepsilon}$. Temos, também, que $w_j \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \dot{I}_{\Sigma}^{\mu_j + \varepsilon}$ (pois $u_h \in QH^{-1-h}$). Então, pela Proposição III.2, temos

$$F(x, \varphi + \sum_{j=0}^{l-1} w_j) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \dot{I}_{\Sigma}^{m-1+\mu_l+\varepsilon}$$

O que implica que $F_l \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \dot{I}_{\Sigma}^{m-1+\mu_l+\varepsilon}$.

Agora, seja $\sum_{h \in H} v_h = \sum_{j=0}^{\infty} w_j$ onde $w_j := \sum_{\text{Re } h = \mu_j} v_h$

Afirmacão III.4 : Se $\mu_j > \mu_l - 1$ então $w_j = 0$

Dem : Seja j_0 tal que $w_{j_0} \neq 0$ e tal que $w_j = 0 \quad \forall j < j_0$.

Agora,

$$F_l - w_{j_0} \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \dot{I}_{\Sigma}^{m+\mu_{j_0}+1+\varepsilon}$$

Assim,

$$\alpha(F_l - w_{j_0}) = \alpha(F_l) - \alpha(w_{j_0}) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} S^{m+\mu_{j_0}+1+\varepsilon}$$

Por outro lado,

$$\alpha(F_l) \in S^{m-1+\mu_l+\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \text{e}$$

$$\alpha(w_{j_0}) \in S^{m+\mu_{j_0}+\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon > 0$$

Sejam $\mu_1 = m + \mu_{j_0} + \varepsilon$ e $\mu_2 = m - 1 + \mu_l + \varepsilon$

Podem ocorrer, apenas, duas possibilidades :

$$1) \quad \mu_1 \leq \mu_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{j_0} \leq \mu_l - 1$$

$$2) \quad \mu_1 > \mu_2$$

Se ocorre 1), tomando $\mu_j > \mu_l - 1$ temos $w_j = 0$. Com a Afirmacão III.5 seguinte, demonstraremos a Afirmacão III.4.

Afirmacão III.5 : $\mu_{j_0} \leq \mu_l - 1$.

Dem : Suponhamos, por absurdo, que $\mu_{j_0} > \mu_l - 1$.

Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\mu = \mu_{j_0} + m > m + \varepsilon + \mu_{j_0+1}$. Além disso temos que $\mu_{j_0} + m > \mu_l - 1 + m + \varepsilon$, por hipótese.

Seja $\mu = \mu_{j_0} + m$ e $\mu' = \max \{ m + \varepsilon + \mu_{j_0+1}, \mu_l - 1 + m + \varepsilon \}$

Temos $\sigma(W_{j_0}) \in S^{\mu'}$

Agora, sabendo que $\sigma(V_h) \in QH^{h+m}$ e $\operatorname{Re}(h+m) = \mu_{j_0} + m = \mu$

Concluimos, utilizando o Lema III.1, que $\sigma(V_h)' \equiv 0$; e portanto $W_{j_0} = 0$, o que é uma contradição.

cqd

A Afirmação III.4 nos dá que $\sum_{\operatorname{Re} h = \mu_j} V_h = 0$ se $\mu_j > \mu_l - 1$,

donde se conclui, utilizando novamente o Lema III.1 que os V_h são nulos se $\operatorname{Re} h > \mu_l - 1$.

E assim

$$F_l \equiv \sum_{\operatorname{Re} h = \mu_l - 1} V_h \quad \text{módulo} \bigcap_{\varepsilon > 0} I_{\Sigma}^{m-1+\mu_{l+1}+\varepsilon}.$$

Se designarmos por $\Phi_l(x', \xi_1)$ o produto $D(X')\xi_1^{-m+1}$ pelo símbolo da função F_l , teremos que

$$\Phi_l \equiv \sum_{\operatorname{Re} h = \mu_l} s_h(x', \xi_1) \quad \text{módulo} \bigcap_{\varepsilon > 0} S^{\mu_{l+1}+\varepsilon},$$

com $s_h(x', \xi_1) \in QH^h$ (para $l=0$ é conveniente pôr $s_h = 0$), pois

$$\sigma(F_l) \equiv \sigma \left[\sum_{\operatorname{Re} h = \mu_l - 1} V_h \right] \quad \text{módulo} \sigma \left[\bigcap_{\varepsilon > 0} I_{\Sigma}^{m-1+\mu_{l+1}+\varepsilon} \right]$$

Isto é

$$\sigma(F_l) = \sum_{\operatorname{Re} h = \mu_l - 1} \sigma(V_h) \quad \text{módulo} \bigcap_{\varepsilon > 0} S^{\mu_{l+1}-1+m+\varepsilon}$$

Como $V_h \in QH^{-1-h-m}$ temos que $\alpha(V_h) \in QH^{h+m}$, e também como $D(X')\xi_1^{-m+1} \in QH^{-m+1}$; utilizando que se $u_j \in QH^{d_j}$ ($j = 1, 2$) então $u_1 u_2 \in QH^{d_1 + d_2}$ temos que

$$D(X')\xi_1^{-m+1} \cdot \alpha(V_h) \in QH^{h+1}$$

Agora

$$QH^{h+1} = QH^{\operatorname{Re} h + i \operatorname{Im} h + 1} = QH^{\mu_l + i \operatorname{Im} h} = QH^{\tilde{h}} \quad \text{onde}$$

$$\operatorname{Re} \tilde{h} = \mu_l.$$

$$\text{Façamos } s_h := D(X')\xi_1^{-m+1} \cdot \alpha(V_h).$$

Então

$$\Phi_l \equiv \sum_{\operatorname{Re} h = \mu_l} s_h(x', \xi_1) \quad \text{módulo } \bigcap_{\varepsilon > 0} S^{\mu_{l+1} + \varepsilon} \quad \text{onde}$$

$$s_h \in QH^h.$$

Agora, como $D(x') \in C^\infty$ e $v(x) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} I^{\mu_l + \varepsilon}$, temos

$$v(x) = \int e^{ix_1 \xi_1} D^{-1}(x') \sigma(x', \xi_1) d\xi_1, \quad \text{onde } \sigma \in \bigcap_{\varepsilon > 0} S^{\mu_l + \varepsilon}.$$

Da Proposição III.2, obtemos a equação de transporte:

$$(III.5) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial x_2} + \sum_{\operatorname{Re} h = \mu_l} s_h \in \bigcap_{\varepsilon > 0} S^{\mu_{l+1} + \varepsilon}$$

Por outro lado, dizemos que v é clássica para $x_2 < 0$

Portanto

$$(III.6) \quad \sigma(x', \xi_1) \equiv \sum_{\operatorname{Re} h = \mu_l} \sigma_h(x', \xi_1) \quad \text{módulo } \bigcap_{\varepsilon > 0} S^{\mu_{l+1} + \varepsilon},$$

$$\text{onde } \sigma_h \in QH^h.$$

Utilizando o Lema III.1 mostraremos, agora, que para $x_2 < 0$, a equação (III.5) é equivalente à

$$(III.7) \quad \partial_{x_2} \sigma_h + s_h = 0 \quad \text{para } \operatorname{Re} h = \mu_l$$

De (III.6) decorre que

$$\partial_{x_2} \sigma(x', \xi_1) + \sum_{\operatorname{Re} h = \mu_l} s_h \equiv \sum_{\operatorname{Re} h = \mu_l} s_h + \sum_{\operatorname{Re} h = \mu_l} \partial_{x_2} \sigma_h(x', \xi_1)$$

módulo $\bigcap_{\varepsilon > 0} S^{\mu_{l+1} + \varepsilon}$.

O lado esquerdo da igualdade acima, por hipótese, pertence a

$\bigcap_{\varepsilon > 0} S^{\mu_{l+1} + \varepsilon}$

Logo

$$\sum_{\operatorname{Re} h = \mu_l} (\partial_{x_2} \sigma_h + s_h) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} S^{\mu_{l+1} + \varepsilon}$$

Agora, utilizando o Lema III.1 temos

$$\partial_{x_2} \sigma_h + s_h = 0 \quad \text{para } \operatorname{Re} h = \mu_l$$

Agora, se supormos, por exemplo, $\xi_1 > 0$:

$$s_h(x', \xi_1) = \xi_1^h \sum_{j=0}^k C_j(x') (\operatorname{Log} \xi_1)^j$$

$$\sigma_h(x', \xi_1) = \xi_1^h \sum_{j=0}^k C_j^*(x') (\operatorname{Log} \xi_1)^j,$$

teremos que a equação de (III.7) equivale à $\frac{\partial C_j^*}{\partial x_2} + C_j = 0$

para $0 \leq j \leq k$.

Portanto, para $h \in H$ com $\operatorname{Re} h = \mu_l$, podemos prolongar de forma única os $\sigma_h(x', \xi_1)$ à x_2 qualquer; deste modo a equação de transporte de (III.7) é satisfeita. Designemos, ainda, σ_h estes prolongamentos, e seja

$$\sigma - \sum \sigma_h =: r$$

Obtemos, para $|\xi_1|$ grande :

$$\frac{\partial r}{\partial x_2} = \Psi, \quad \Psi \in \bigcap_{\varepsilon > 0} S^{\mu_{l+1} + \varepsilon}$$

$$r \in \bigcap_{\varepsilon > 0} S^{\mu_{l+1} + \varepsilon} \quad \text{para } x_2 < 0$$

Deduzimos que $r \in \bigcap_{\varepsilon > 0} S^{\mu_{l+1} + \varepsilon}$ para x_2 qualquer.

Se considerarmos $u_h \in QH^{-1-h}$ de amplitude $D^{-1}(X') \alpha_h(x', \xi_1)$, para $h \in H$ $\text{Re } h = \mu_l$, obtemos

$$v = w + \sum_{\text{Re } h = \mu_l} u_h, \quad w \in \bigcap_{\varepsilon > 0} I_{\Sigma}^{\mu_{l+1} + \varepsilon}.$$

Agora, pela propriedade (II.b.5) temos

$$u = \tilde{\varphi} + \sum_{\text{Re } h \geq \mu_l} u_h + \tilde{w} \quad \text{onde } \tilde{\varphi} \in C^\infty, \quad \tilde{w} \in \bigcap_{\varepsilon > 0} I_{\Sigma}^{\mu_{l+1} + \varepsilon}$$

Portanto construímos, por indução sobre $l \in \mathbb{N}$, funções

$$u_h \quad (h \in H, \text{Re } h = \mu_l), \quad \text{com } u_h \in QH^{-1-h} \quad \text{e } u \sim \sum_{h \in H} u_h.$$

cqd

REFERENCIAS

- [1] Folland , G.B. - *Lectures on Partial Differential equations* - Tata Institute - Bombay , 1983
- [2] Hörmander , L. - *The Analysis of Linear Partial Differential Operators* - volume I - Springer - Verlag
- [3] Hörmander , L. - *The Analysis of Linear Partial Differential Operators* - volume III - Springer - Verlag
- [4] Piriou , A. - *Calcul Symbolique non Linéaire pour une onde Conormale Simple* - Ann. Inst. Fourier , Grenoble - 38,4 (1988), 173 - 187 .
- [5] Rauch , J. - Reed , M. - *Non Linear Microlocal Analysis of Semilinear Hyperbolic Systems in one space dimension* , Duke Math. journal , 49 (1982) , 397 - 475 .