UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EXAME DE ADMISSÃO PARA O MESTRADO - 2025.1

22 de novembro de 2025

1. Defina a distância de um ponto $a \in \mathbb{R}$ a um conjunto não vazio $X \subset \mathbb{R}$ como

$$d(a, X) = \inf\{|x - a| : x \in X\}.$$

Prove que $d(a, X) = 0 \Leftrightarrow a \in \overline{X}$.

Se $d(a, X) = 0$, então $\inf\{|x - a| : x \in X\} = 0$. Assim, para cada $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, existe $x_n \in X$ tal que $|x_n - a| < \frac{1}{n}$. Dessa forma, temos uma sequência $(x_n) \subset X$ com $x_n \to a$, quando $n \to \infty$, ou seja, $a \in \overline{X}$.

Por outro lado, é claro que $0 \leq |x - a|$, para cada $x \in X$, isto é, 0 é uma cota inferior para o conjunto $\{|x - a| : x \in X\}$. Vamos mostrar que é a maior das cotas inferiores. Como $a \in \overline{X}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in X$ tal que $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, isto é, $|x - a| < \varepsilon$ e assim temos o desejado.

2. Se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $a_n \geq 0$, mostre que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ também converge. Dê um exemplo e justifique porque a condição $a_n \geq 0$ não pode ser dispensada.

Sabemos que, se $\sum a_n$ converge, então $a_n \to 0$. Portanto, a_n é limitado, digamos $a_n \leq M$ para todo n. Pela convergência, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n > N \Longrightarrow a_n < 1$, o que implica que $a_n^2 < a_n$. Agora, comparemos a sequência a_n^2 com a sequência:

$$b_m = \begin{cases} M^2 & m < N \\ a_m & m \geq N \end{cases}$$

Você pode ver que $b_m \geq a_m^2$ para todo m, pela forma como escolhemos n. Além disso, $\sum_{m=1}^{\infty} b_m = M^2(N-1) + \sum_{m=N}^{\infty} a_n$, que é finito. Pelo teste da comparação, segue o desejado. Para a segunda parte, considere $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$. É fácil ver que $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona decrescente. Pelo teste de Leibniz temos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge, entretanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$ diverge.

3. Prove que toda aplicação localmente Lipschitziana definida num conjunto compacto é Lipschitziana.

Seja $f : K \to \mathbb{R}$ onde K é um compacto. Como f é localmente Lipschitz, para cada x, existe algum $r_x > 0$ e L_x tal que f é Lipschitz com constante L_x em $B(x, r_x)$. Então, os conjuntos $B(x, \frac{1}{2} r_x)$, com $x \in K$, formam uma cobertura aberta de K, portanto um número finito cobre K. Para conveniência, denotamos estes por $B(x_k, \frac{1}{2} r_k)$ (ao invés de r_{x_k}). Definimos $M = \sup_{x \in M} \|f(x)\|$, $r = \frac{1}{2} \min r_k$, $L_0 = \frac{2M}{r}$, e $L = \max(L_0, L_k)$. Então, L é uma constante de Lipschitz para f em K. Para ver isso, escolha $x, y \in K$. Se $\|x - y\| \geq r$, então temos que

$$\frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} \leq \frac{2M}{r} = L_0 \leq L.$$

Se $\|x - y\| < r$, então para algum x_k, temos $x \in B(x_k, \frac{1}{2} r_k)$. Então $y \in B(x_k, r_k)$ e, assim,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L_k \|x - y\| \leq L \|x - y\|.$$

4. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, com derivada limitada, prove que existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = x + c \cdot f(x)$, é uma bijeção cuja inversa é derivável.

   Como f tem derivada limitada, existe $k > 0$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Pelos corolários do Teorema do Valor Médio, f é Lipschitziana com constante de Lipischitz k, isto é, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Considere $c > 0$ tal que $ck < 1$, e $\phi(x) = x + c \cdot f(x)$. Suponha que ϕ não é injetiva, então existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x \neq y$ e $\phi(x) = \phi(y)$, ou seja, $x + c \cdot f(x) = y + c \cdot f(y)$. Então, $x - y = c(f(x) - f(y)) \Rightarrow |x - y| \leq c|f(x) - f(y)| \leq ck|x - y| < |x - y|$, o que é uma contradição. Aplique o Teorema do Valor Médio a φ no intervalo $[0, x]$ então existe $\xi \in (0, x)$ tal que

$$\begin{aligned} &\varphi(x) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)(x - 0) = (1 + cf'(\xi))\, x \geq (1 - ck)x \\ \Longrightarrow &\varphi(x) \geq \varphi(0) + (1 - ck)x \end{aligned}$$

   Isso significa que $\varphi(x)$ é ilimitada superiormente quando $x \to +\infty$. Agora, aplique o TVM a φ no intervalo $[y, 0]$ então existe $\zeta \in (y, 0)$ tal que

$$\begin{aligned} &\varphi(0) - \varphi(y) = \varphi'(\zeta)(0 - y) = (1 + cf'(\zeta))\, |y| \geq (1 - ck)|y| \\ \Longrightarrow &\varphi(y) \leq \varphi(0) - (1 - ck)|y| \end{aligned}$$

   Isso significa que $\varphi(y)$ é ilimitada inferiormente quando $y \to -\infty$. Para qualquer número $d \in \mathbb{R}$, tome um x suficientemente positivo tal que $\varphi(x) > d$ e um y suficientemente negativo tal que $\varphi(y) < d$. Como $\mathbb{R}$ é um conjunto conexo, então pelo Teorema do Valor Intermediário (TVI), existe um $z \in (y, x)$ tal que $\varphi(z) = d$, ou seja, g é sobrejetora.

5. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não-negativa. Então $\int_a^b f(x)dx = 0$ se, e somente se, $f(x) = 0$.

   Suponha que f não é identicamente nula, assim existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) > 0$. Como f é contínua, existe $\delta > 0$, que podemos supor menor do que $\frac{b-a}{2} > 0$, tal que $f(x) > f(x_0)/2$ para cada $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$. Se $x_0 = a$, então $\int_a^{a+\delta} f(x)dx \geq \delta \frac{f(x_0)}{2}$. Se $x_0 \in (a, b)$, $\int_a^b f(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx \geq \delta f(x_0) > 0$. Por fim, se $x_0 = b$, $\int_a^b f(x)dx \geq \int_{b-\delta}^b f(x)dx \geq \delta \frac{f(x_0)}{2}$. O que é um absurdo em qualquer caso. Por outro lado, se $f(x) = 0$, é claro que $\int_a^b f(x)dx = 0$.

Definições

Definição 1. *Uma aplicação $g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita Lipschitziana quando $|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$, para cada $x, y \in X$ e algum $k > 0$.*

Definição 2. *Uma aplicação $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se localmente Lipschitziana quando, para todo $x \in X$, existe um intervalo aberto B, de centro x, tal que $f \mid (B \cap X)$ é Lipschitziana.*