UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CCEN – DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EXAME DE ADMISSÃO PARA O DOUTORADO - 2025.1

22 de novembro de 2025

1. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma bijeção. Mostre que f é homeomorfismo se, e somente se, para todo $A \subset \mathbb{R}^n$ tem-se $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

   Seja $b \in f(\overline{A})$ então existe $a \in \overline{A}$ tal que $b = f(a)$. Como $a \in \overline{A}$ existe uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ com $a_n \to a$. Sendo f contínua temos que $f(a_n) \to f(a) = b$. Como $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset f(A)$ deduzimos que $b \in \overline{f(A)}$. Por outro lado, se $b \in \overline{f(A)}$, existe uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $f(a_n) \to b$. Sendo f^{-1} contínua, temos que $a_n \to f^{-1}(b)$, ou seja, $f^{-1}(b) \in \overline{A}$ e assim, $b \in f(\overline{A})$.

   Queremos mostrar que f é contínua, para isso, seja $F \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado, queremos provar que $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$. Por hipótese, $f(\overline{f^{-1}(F)}) = \overline{f(f^{-1}(F))} = \overline{F} = F$. Daí, $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$, como queríamos. Agora, vamos provar que f^{-1} é contínua. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ fechado, queremos mostrar que $\overline{(f^{-1})^{-1}(A)} = (f^{-1})^{-1}(A)$, ou seja, $\overline{f(A)} = f(A) = f(\overline{A})$, pois A é fechado. Sendo essa a hipótese, segue o desejado.

2. Mostre que o conjunto $U = \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{n^2}$, formado pelas matrizes invertíveis $n \times n$, é aberto. Prove que a aplicação $f : U \to \mathbb{R}^{n^2}$, dada por $f(X) = X^{-1}$, é diferenciável e sua derivada no ponto $A \in U$ é a transformação linear $f'(A) \cdot V = -A^{-1} \cdot V \cdot A^{-1}$.

   Com efeito, se escrevermos

   $$(A+V)^{-1} - A^{-1} = -A^{-1} \cdot V \cdot A^{-1} + r(V)$$

   e multiplicarmos ambos os membros desta igualdade, à esquerda, por $A + V$, obteremos

   $$I - I - VA^{-1} = -VA^{-1} - \left(VA^{-1}\right)^2 + (A+V) \cdot r(V),$$

   donde

   $$r(V) = (A+V)^{-1} \cdot \left(VA^{-1}\right)^2.$$

   Note que, sendo U aberto, existe $(A+V)^{-1}$ para todo V com norma suficientemente pequena. Daí resulta

   $$|r(V)| \leq \left|(A+V)^{-1}\right| \cdot \left|A^{-1}\right|^2 \cdot |V|^2.$$

   Segue-se então do lema abaixo que $\lim_{V\to 0} r(V)/|V| = 0$.

   Lema: Seja $A \in \mathbb{R}^{n^2}$ invertível. Existe $c > 0$ tal que, para toda matriz $n \times n$, V, com $|V| \leq c$, $A + V$ é invertível e $\left|(A+V)^{-1}\right| \leq 1/c$. Demonstração: Tomando $c = \left(2\left|A^{-1}\right|\right)^{-1}$ vem $|x| = \left|A^{-1}Ax\right| \leq \left|A^{-1}\right||Ax|$, donde $|Ax| \geq 2c|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Então $|V| \leq c \Rightarrow |(A+V)x| = |Ax + Vx| \geq |Ax| - |Vx| \geq 2c|x| - c|x| = c|x|$. Logo $|V| \leq c \Rightarrow A + V$ invertível e $|x| = \left|(A+V)(A+V)^{-1}x\right| \geq c\left|(A+V)^{-1}x\right|$, donde $\left|(A+V)^{-1}x\right| \leq |x|/c$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, ou seja, $|V| \leq c \Rightarrow \left|(A+V)^{-1}\right| \leq 1/c$.

3. Considere em $\mathbb{R}^2$ a norma $\|(x,y)\|_p = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}$ onde $1 < p < \infty$. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = ax + by$. Mostre que

   $$\|f\| := \sup_{\substack{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \\ \|(x,y)\|_p = 1}} |ax + by| = (|a|^q + |b|^q)^{\frac{1}{q}},$$

   onde q é tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Dica: Se $\|\cdot\|$ é uma norma qualquer em $\mathbb{R}^n$ e $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ é um funcional linear, então

$$\|f\| := \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, \|x\|=1} f(x).$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$|f(x,y)| \le \|(a,b)\|_q \|(x,y)\|_p,$$

e assim, $\|f\| \le \sqrt[q]{|a|^q+|b|^q}$. Resta mostrar que $\sqrt[q]{|a|^q+|b|^q} \le \|f\|$, para isso vamos considerar

$$g(x,y) = |x|^p + |y|^p - 1.$$

Com isso, para f e g, temos

$$\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= (a,b)\\
\nabla g(x,y) &= \left(p|x|^{p-1}\frac{x}{|x|}, p|y|^{p-1}\frac{y}{|y|}\right)\\
&= \left(p|x|^{p-2}x, p|y|^{p-2}y\right)
\end{aligned}$$

Desta forma, nosso objetivo é obter as soluções do sistema abaixo:

$$\begin{cases} p|x|^{p-2}x = \lambda a\\ p|y|^{p-2}y = \lambda b\\ |x|^p+|y|^p = 1\end{cases} \tag{1}$$

Multiplicando $(1)_1$ por b e $(1)_2$ por a, vem

$$\begin{cases} bp|x|^{p-1} = \lambda ab\\ ap|y|^{p-1} = \lambda ab\\ |x|^p+|y|^p = 1\end{cases}, \tag{2}$$

se $x,y>0$. De $(2)_1$ e $(2)_2$, temos

$$\begin{aligned}
bp|x|^{p-1} = ap|y|^{p-1} &\Rightarrow |x|^{p-1} = \left(\frac{a}{b}\right)\cdot|y|^{p-1}\\
&\Rightarrow |x| = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p-1}}|y|
\end{aligned} \tag{3}$$

Substituindo $|x|$ em $(1)_3$,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^q |y|^p + |y|^p = 1.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
|y|^p\cdot\left(\frac{a^q}{b^q}+1\right) = 1 &\Rightarrow |y|^p\cdot\left(\frac{a^q+b^q}{b^q}\right) = 1\\
&\Rightarrow |y|^p = \frac{b^q}{a^q+b^q}\\
&\Rightarrow |y| = \frac{b^{\frac{1}{p-1}}}{\sqrt[p]{a^q+b^q}}
\end{aligned}$$

Substituindo em (3), temos

$$|x| = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p-1}}\frac{b^{\frac{1}{p-1}}}{\sqrt[p]{a^q+b^q}} = \frac{a^{\frac{1}{p-1}}}{\sqrt[p]{a^q+b^q}}.$$

Considerando $a,b>0$, segue que $x,y>0$ e

$$x = \frac{a^{\frac{1}{p-1}}}{\sqrt[p]{a^q+b^q}} \text{ e } y = \frac{b^{\frac{1}{p-1}}}{\sqrt[p]{a^q+b^q}}$$

Logo, substituindo en f,

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{a^{\frac{1}{p-1}+1}}{\sqrt[p]{a^q+b^q}} + \frac{b^{\frac{1}{p-1}+1}}{\sqrt[p]{a^q+b^q}}\\
&= \frac{a^{\frac{p}{p-1}}+b^{\frac{p}{p-1}}}{\sqrt[p]{a^q+b^q}} = (|a|^q+|b|^q)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

4. a) Enuncie o Teorema da Função Implícita para funções $f : U \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ juntamente com a fórmula para as derivadas parciais da função implícita.

   b) Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções tais que $g(x) = f(x)(1 + f(x)^4)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que se g é de classe C^k, $k \geq 1$ então f é de classe C^k.

a) Teorema da Função Implícita: Dada a função $f : U \to \mathbb{R}$, de classe $C^k (k \geq 1)$ no aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$, seja $(x_0, y_0) \in U$ tal que $f(x_0, y_0) = c$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Existem uma bola $B = B(x_0; \delta) \subset \mathbb{R}^n e$ um intervalo $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ com as seguintes propriedades:

1) $B \times \bar{J} \subset U$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \in B \times \bar{J}$;

2) Para todo $x \in B$ existe um único $y = \xi(x) \in J$ tal que $f(x, y) = f(x, \xi(x)) = c$. A função $\xi : B \to J$, assim definida, é de classe C^k e suas derivadas parciais em cada ponto $x \in B$ são dadas por

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, \xi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi(x))}.$$

b) Seja $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x, y) = g(x) - y\left(1 + y^4\right)$. Então $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = -1 - 5y^4 \neq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Assim, para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, pondo $y_0 = f(x_0)$ temos $\varphi(x_0, y_0) = 0$. Pelo Teorema da Função Implícita, existem uma bola $B = B(x_0, \delta) \subset \mathbb{R}^n$, um intervalo $J = [y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon]$ e uma função $\xi : B \to J$ de classe C^k tais que, para todo $x \in B$, $\xi(x)$ é o único ponto em J tal que $\varphi(x, \xi(x)) = 0$. Como f é contínua (prove isto!), podemos tomar $\delta > 0$ tão pequeno que $f(B) \subset J$. E, sabendo que $\varphi(x, f(x)) = 0$ para todo $x \in B$, concluímos que $f(x) = \xi(x)$ se $x \in B$, portanto f é de classe C^k.

5. Seja $f : U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se, no ponto $a \in U$, a derivada $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, prove que

$$\lim_{r \to 0} \frac{\operatorname{vol} f(B[a; r])}{\operatorname{vol} B[a; r]} = |\det f'(a)|.$$

Uma observação preliminar: se $f : B(a; r) \to \mathbb{R}$ é contínua, com $m(r) = \inf\{f(x); x \in B(a; r)\}$ e $M(r) = \sup\{f(x); x \in B(a; r)\}$ então $f(a) = \lim_{r \to 0} m(r) = \lim_{r \to 0} M(r)$ e $m(r) \leq f(x) \leq M(r)$ para todo $x \in B(a; r)$. Segue-se daí que

$$m(r) \leq \frac{1}{\operatorname{vol} B(a; r)} \int_{B(a; r)} f(x) dx \leq M(r),$$

portanto

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{\operatorname{vol} B(a; r)} \int_{B(a; r)} f(x) dx = f(a).$$

Dito isto, vemos que $\operatorname{vol} \cdot f(B(a; r)) = \int_{f(B(a; r))} 1 \cdot dy = \int_{B(a; r)} |\det f'(x)| \, dx$, portanto

$$\lim_{r \to 0} \frac{\operatorname{vol} \cdot f(B(a; r))}{\operatorname{vol} \cdot B(a; r)} = |\det f'(a)| \, .$$